Chapitre I

DESCRIPTION DES MILIEUX CONTINUS

Sommaire

*Le concept de **milieu continu** est utilisé pour modéliser les milieux naturels à l'échelle **macroscopique**.*

*Il convient donc d'abord de préciser les conditions de pertinence du modèle pour s'affranchir des discontinuités de ces milieux à l'échelle **microscopique**.*

L'utilisation du modèle repose alors sur les concepts de :

- ***propriété intensive**, c'est-à-dire définie en un point ;*
- ***particule** ou élément infinitésimal doté de propriétés extensives (dont un volume) mais sans forme déterminée et assimilable mécaniquement à un point matériel.*

- *Description lagrangienne :*

Elle consiste à identifier les particules par leur position $\vec{X}$ dans une configuration initiale et à les suivre dans leur mouvement.

- ***Variables de Lagrange :** $\vec{X}$ et t.*
- ***Configuration à un instant** t **:***

Positions : $\vec{x} = \Phi(\vec{X}, t)$

Vitesses : $\vec{U} = \dfrac{\partial \Phi(\vec{X}, t)}{\partial t}$

Autres grandeurs (par exemple vectorielle) : $\vec{g} = G(\vec{X}, t)$

- *Description eulérienne :*

Elle consiste à observer les propriétés des particules qui passent successivement en un point donné.

- ***Variables d'Euler :*** *$\vec{x}$ et t*
- ***Configuration à un instant*** *t* ***:***

  Vitesses : $\vec{U}(\vec{x},t)$

  Autres grandeurs (par exemple vectorielle) : $\vec{g}(\vec{x},t)$

- *<u>Vitesse d'une particule :</u>*

Pour une particule donnée, la position $\vec{x}$ est une fonction $\vec{x}(t)$ de la seule variable t.

La vitesse est, par définition, la dérivée de $\vec{x}(t)$, soit : $\boxed{\vec{U} = \dfrac{d\vec{x}(t)}{dt}}$

Cette expression de la vitesse s'identifie à $\dfrac{\partial\Phi(\vec{X},t)}{\partial t}$ pour $\vec{X} = Cte$.

<u>Convention :</u> On réservera toujours la notation $\dfrac{d}{dt}$ aux seules dérivations totales par rapport au temps de grandeurs liées à la particule, exprimées directement ou indirectement en fonction de t, lorsqu'on suit la particule dans son mouvement.

- *<u>Lignes caractéristiques :</u>*

- ***Trajectoire :*** *lieu des positions successives d'une même particule.*
- ***Ligne de courant à un instant t :*** *courbe tangente en chaque point à la vitesse de la particule qui s'y trouve.*
- ***Ligne d'émission d'un point A à un instant T :*** *ensemble des positions à l'instant T des particules qui sont passées par A.*

- *<u>Déplacement virtuel :</u>*

C'est un déplacement géométrique envisagé indépendamment de toute loi horaire et qui ne correspond pas à un déplacement de particules.

<u>Convention :</u> On notera δ les déplacements virtuels élémentaires et les variations correspondantes de toutes fonctions.

Si $\vec{x} = \vec{x}\left(\vec{X}\right)$, en se limitant au premier ordre : $\boxed{\delta\vec{x} = \overset{\Rightarrow}{J}.\delta\vec{X}}$

$\overset{\Rightarrow}{J}$ étant la matrice Jacobienne de $\vec{x}\left(\vec{X}\right)$.

La transformation correspondante du volume est : $\boxed{\delta V = \left|J\right|\delta V_0}$

$\left|J\right|$ étant le déterminant de la matrice Jacobienne.

- *<u>Déplacement virtuel :</u>* $\boxed{\dfrac{1}{\delta V}\dfrac{d(\delta V)}{dt} = div\vec{U}}$

1 – CONCEPT DE MILIEU CONTINU

1.1 – Définition

Un milieu est continu dans une région de l'espace s'il occupe entièrement cette région sans discontinuité spatiale ou temporelle pour ses propriétés.

Ce concept est fondamental car à notre échelle (dite *macroscopique*) il modélise par morceaux les milieux matériels. Il traduit en effet nos perceptions courantes, même les plus fines.

Par contre, il ne traduit pas la structure réelle de la matière constituée, à une échelle ultra-fine (dite *microscopique*), d'un grand nombre de particules distinctes.

Il convient donc, tout d'abord, de préciser les conditions de pertinence du modèle milieu continu pour représenter les milieux matériels.

1.2 – Les deux approches

a) Approche microscopique

Pour décrire un milieu matériel suivant une approche microscopique, on s'intéresse aux différentes particules qui le constituent. Selon le niveau d'organisation considéré, ce peut être des grains, des molécules, des atomes, des protons et neutrons, voire des quarks… Chaque particule a une masse, une vitesse, une énergie cinétique, un volume …

Pour une partie quelconque du milieu, les *propriétés extensives*, c'est-à-dire relatives à l'ensemble considéré telles que la masse ou l'énergie cinétique, sont la somme des quantités correspondantes des particules constituant l'ensemble (mais pas le volume, la structure étant essentiellement lacunaire).

Quant à la notion de *propriété intensive*, c'est-à-dire définie en un point, elle n'a ici aucun sens pour la même raison.

b) Approche macroscopique

Dans une approche macroscopique, celle qui sera toujours la nôtre, on adopte à priori le modèle milieu continu qui évacue toute les discontinuités du domaine considéré.

Dans un milieu continu, les *grandeurs extensives* sont définies et supposées mesurables sur toute partie du domaine. Le volume est lui-même une grandeur extensive puisque, par définition, il n'y a pas de vide dans un milieu continu. Dès lors, on peut imaginer une partition très serrée dont les éléments de volume ΔV ont des propriétés extensives qui, par définition, décroissent et tendent vers zéro quand ΔV décroît et tend vers zéro.

Le quotient de deux grandeurs extensives scalaires d'un même élément est une *grandeur intensive* moyenne sur l'élément et sa limite quand l'élément tend vers zéro est la grandeur intensive au point où le volume s'évanouit.

- On a ainsi, par exemple, sur l'élément de volume ΔV la masse volumique moyenne $\rho_{moy} = \dfrac{\Delta m}{\Delta V}$ et au point central de ΔV la masse volumique que l'on notera : $\rho = \lim\limits_{\Delta V \to 0} \left(\dfrac{\Delta m}{\Delta V} \right) = \dfrac{\delta m}{\delta V}$.

- La grandeur de référence n'est pas nécessairement le volume. On a, par exemple, en rapportant l'énergie ΔE d'un élément à sa masse Δm, une énergie massique moyenne $e_{moy} = \dfrac{\Delta E}{\Delta m}$ et une énergie massique ponctuelle $e = \lim\limits_{\Delta m \to 0} \left(\dfrac{\Delta E}{\Delta m} \right) = \dfrac{\delta E}{\delta m}$.

- La grandeur extensive initiale et la grandeur intensive associée peuvent également être vectorielles. On a par exemple :

  - *une force massique,* en rapportant une force extérieure $\Delta \vec{F}$ exercée sur un élément à sa masse Δm : $\vec{f} = \lim\limits_{\Delta m \to 0} \left(\dfrac{\Delta \vec{F}}{\Delta m} \right) = \dfrac{\delta \vec{F}}{\delta m}$;
  - *une pression,* en rapportant une force $\Delta \vec{F}$ exercée normalement sur un élément de surface ΔS : $\vec{p} = \lim\limits_{\Delta S \to 0} \left(\dfrac{\Delta \vec{F}}{\Delta S} \right) = \dfrac{\delta \vec{F}}{\delta S}$.

Réciproquement, la connaissance d'une grandeur extensive unitaire en tout point d'un domaine donne, par intégration, la valeur de la grandeur extensive pour l'ensemble du domaine.

Par exemple : $$m = \int_V \rho \, \delta V \quad , \quad \vec{F} = \int_S \vec{p} \, \delta S \ , \ldots$$

Les variations spatiales et temporelles des grandeurs intensives d'un milieu continu sont donc continues.

1.3 – Prise en compte de la discontinuité microscopique

a) Grandeurs extensives

Pour un milieu matériel, la limite stricte du rapport de deux grandeurs extensives n'est pas définie du fait de sa structure discontinue à l'échelle microscopique.

Ainsi, par exemple, soit un tas de sable qui constitue un milieu macroscopiquement continu. En considérant autour d'un point M un volume élémentaire $\Delta V = a^3$, on obtient pour la masse volumique moyenne une variation en fonction de a dont l'allure est représentée sur la figure I-1.

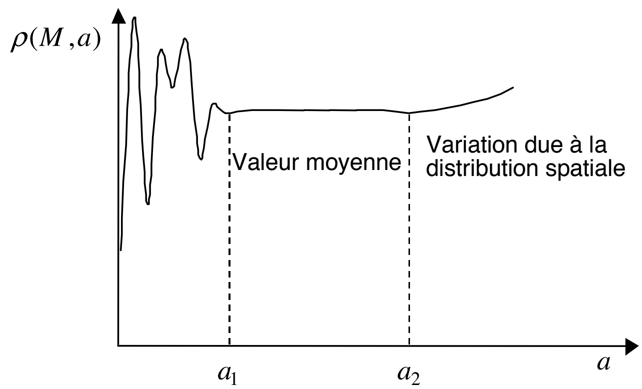

Fig. I-1 *Schéma de définition de la masse volumique*

On observe essentiellement :

- pour $a < a_1$ des variations *aléatoires* dues à la structure en grains (selon la taille des grains, a_1 peut être de l'ordre du cm) ;

- pour $a > a_2$ une éventuelle variation *lente* due à la prise en compte dans le volume a^3 de la distribution spatiale ;

- pour $a_1 < a < a_2$ une valeur très sensiblement *indépendante* de a.

Il est donc naturel, pour une étude macroscopique, d'adopter cette valeur pour ρ en lieu et place de la limite stricte indéfinie.

A noter que a_1 est très grand devant la dimension des grains ℓ que l'on peut prendre pour caractériser les discontinuités.

Pour un gaz dans un domaine dont l'étendue peut être représentée par une dimension caractéristique L, il est usuel d'admettre que le milieu est continu quand L est très grand devant le libre parcours moyen des molécules ℓ (c'est-à-dire un nombre de Knudsen $Kn = \dfrac{\ell}{L} << 1$ avec $\ell = \dfrac{kT}{\sqrt{2}\pi p \sigma^2}$ où k est la constante des gaz parfaits et σ est le diamètre de collision des molécules).

A pression atmosphérique et à température ambiante (T = 300 K), ℓ = 6,5 10^{-8} m.

b) La température

Le cas de la température, grandeur intensive, s'analyse de la même manière : la notion de température n'a pas de sens pour une molécule ou un atome unique. Elle est en effet, par définition, proportionnelle à l'agitation thermique, c'est-à-dire à l'énergie cinétique moyenne des particules dans leur mouvement relatif à l'échelle microscopique. Sa signification n'intervient donc, là encore, que pour un élément $\Delta V = a^3$ contenant un nombre suffisant de particules pour que la notion de moyenne ait un sens.

c) Conclusion

Dans le modèle milieu continu, on adopte la définition et les propriétés mathématiques des grandeurs intensives mais en leur conférant une valeur égale à la valeur moyenne obtenue dans un domaine élémentaire $\Delta V = a^3$ significatif et donc grand devant la discontinuité, soit :

$$\boxed{\ell << a << L}$$

où ℓ est une dimension caractéristique des discontinuités et L une dimension caractéristique du domaine étudié.

1.4 – Particule en milieu continu

Par abus de langage, on appelle *particule d'un milieu continu* un élément de volume $\Delta V = a^3$ tel que la relation $\ell << a << L$ soit vérifiée.

C'est-à-dire que l'élément doit être :

- suffisamment *grand* pour qu'il contienne un assez grand nombre de molécules pour donner un sens à la notion de moyenne,

- suffisamment *petit* pour pouvoir le considérer comme une entité caractérisable par sa seule position.

Comme toute partie du milieu, la particule a une masse Δm, des propriétés extensives telles que ΔE et un volume ΔV. Mais pour la particule, la notion de forme s'évanouit. La particule est ainsi assimilable à un point matériel dont la vitesse est égale à la vitesse moyenne des molécules qui la composent.

2 – Description lagrangienne

2.1 – Définition

La description lagrangienne d'un milieu continu consiste à caractériser le mouvement de ce milieu par rapport à sa configuration initiale dite configuration de référence.

Pour toute particule dont la position est donnée à un instant initial, elle consiste à exprimer, à un instant ultérieur, la position et la valeur de toute grandeur liée à cette particule.

Soit donc, à un instant initial t_0, une configuration de référence dans laquelle une particule est identifiée par sa position M_0 avec $\overrightarrow{OM}_0 = \vec{X}\left\{X_1, X_2, X_3\right\}$. A tout instant ultérieur t, la description de Lagrange donne pour la même particule :

- sa position $\overrightarrow{OM} = \vec{x}\{x_1, x_2, x_3\}$ par : $\vec{x}\left(\vec{X}, t\right) = \Phi\left(\vec{X}, t\right)$
- toute grandeur la caractérisant (par exemple vectorielle) : $\vec{g}\left(\vec{X}, t\right) = G\left(\vec{X}, t\right)$

La grandeur liée à la particule peut également être scalaire ou tensorielle.

X_1, X_2, X_3 et t sont les *variables de Lagrange* de la particule.

2.2 – Hypothèses des milieux continus

Pour traduire la continuité du milieu, les fonctions Φ et G sont supposées bijectives, définies pour tout t, continues, continuement dérivables et inversibles.

Il résulte immédiatement de ces hypothèses que :

- $\vec{X} = \Phi(\vec{X}, t_0)$
- $\vec{X} = \Phi^{-1}(\vec{x}, t)$
- toute courbe, surface ou volume se transforme respectivement en courbe, surface ou volume ;
- le jacobien $J\left(\vec{X}, t\right) = \dfrac{D\left(x_1, x_2, x_3\right)}{D\left(X_1, X_2, X_3\right)}$ est strictement positif (puisque $\Phi(\vec{X}, t)$ étant continue, continuement dérivable et inversible, il ne peut être ni nul ni infini) et que $J\left(\vec{X}, t_0\right) = 1$.

2.3 – Vitesses

Le vecteur vitesse d'une particule est la dérivée par rapport au temps t de son vecteur position, soit, par définition, à tout instant : $\boxed{\vec{U}\left(\vec{X}, t\right) = \dfrac{\partial \Phi\left(\vec{X}, t\right)}{\partial t}}$

De même, pour l'accélération : $\vec{\gamma}\left(\vec{X}, t\right) = \dfrac{\partial^2 \Phi\left(\vec{X}, t\right)}{\partial t^2}$

Le symbole $\dfrac{\partial}{\partial t}$ désigne la dérivée partielle par rapport à t avec X_1, X_2, X_3 fixés.

Remarque :

Une particule donnée $\vec{X}$ est identifiée par sa position initiale qui est bien déterminée. Pour cette particule, Φ n'est donc fonction que de la seule variable t. On écrira donc aussi :

$$\vec{x}\left(\vec{X}, t\right) = \Phi(t) \qquad \vec{U}\left(\vec{X}, t\right) = \frac{d\Phi(t)}{dt} \qquad \vec{\gamma}\left(\vec{X}, t\right) = \frac{d^2\Phi(t)}{dt^2}$$

Réciproquement, la connaissance de la vitesse ou de l'accélération d'une particule à chaque instant et des conditions initiales permet d'en déterminer le mouvement par intégration.

Le symbole $\frac{d}{dt}$ désignera toujours la dérivation par rapport au temps soit d'une fonction du temps seul, soit d'une fonction de fonctions du temps. C'est alors la *dérivée totale* de cette fonction de fonctions.

2.4 – Trajectoires et lignes d'émission

a) Trajectoires

La trajectoire d'une particule déterminée $\vec{X}$ est l'ensemble de ses positions successives (Fig. I-2). Pour $\vec{X}$ fixé, c'est donc la courbe paramétrée en fonction de t :

$$\vec{x}(\vec{X},t) = \Phi(\vec{X},t)$$

Physiquement, on peut visualiser une trajectoire en marquant la particule avec un colorant et en filmant sa progression dans un écoulement, ou bien en prenant une photographie avec un temps de pose prolongé permettant de faire coexister sur le cliché les images successives de la particule.

b) Lignes d'émission

A un instant T donné, la ligne d'émission d'un point A est l'ensemble des positions à cet instant des particules qui sont passées par A (Fig. I-2).

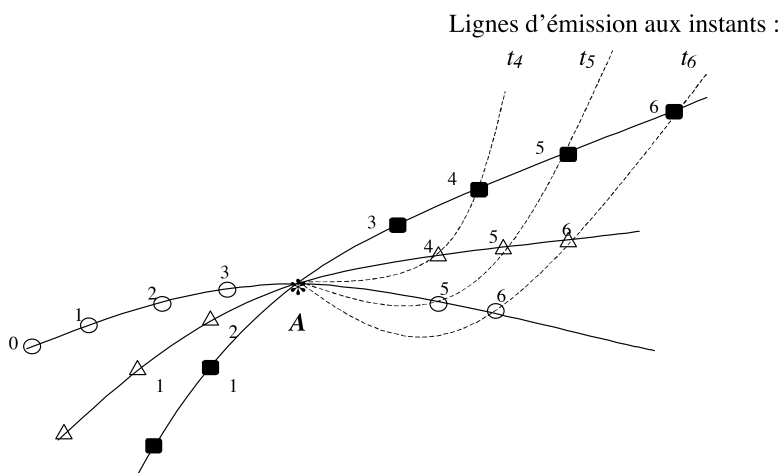

Fig. I-2 *Trajectoires et lignes d'émission de A*

Soit $\vec{X}$ la particule qui était en A à l'instant τ . Si $\vec{a}$ est la position de A on a : $\vec{a} = \Phi(\vec{X},\tau)$ ou $\vec{X} = \Phi^{-1}(\vec{a},\tau)$. A l'instant T, la ligne d'émission de A est donc la courbe paramétrique en fonction de τ :

$$\vec{x} = \Phi(\Phi^{-1}(\vec{a},\tau),T)$$