Dans tout le problème, $\mathbb{R}^2$ est muni du produit scalaire euclidien canonique noté $\left(\cdot|\cdot\right)$ et de la norme $\|\cdot\|$ associée. Si Ω est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$ et si $(k,n)\in(\mathbb{N}^\star)^2$, on note $\mathcal{C}^k(\Omega,\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ de Ω dans $\mathbb{R}^n$.

Si $f\in\mathcal{C}^1(\Omega,\mathbb{R}^n)$, la différentielle de f au point p de Ω est notée df_p ; sa matrice relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}^n$ est appelée matrice jacobienne de f en p et est notée $\mathrm{Jac}f(p)$.

Si f est dans $\mathcal{C}^2(\Omega,\mathbb{R})$, on dit que f vérifie (1) si et seulement si

$$\forall(x,y)\in\Omega,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\times\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)-\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)\Big)^2=1 \qquad (1).$$

On note $\mathcal{P}_2$ l'ensemble des fonctions polynomiales de degré $\leqslant 2$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ c'est-à-dire les applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de la forme

$$(x,y)\mapsto ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f \text{ où } (a,b,c,d,e,f)\in\mathbb{R}^6.$$

Le but principal du problème est de montrer que les solutions de (1) sur $\mathbb{R}^2$ appartiennent à $\mathcal{P}_2$.

I Les équations de Cauchy-Riemann

Soient f et g dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ vérifiant les équations, dites de Cauchy-Riemann,

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial g}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{\partial g}{\partial x}.$$

On définit deux fonctions sur $\mathbb{R}_+^\star\times\mathbb{R}$ par

$$\forall(r,\theta)\in\mathbb{R}_+^\star\times\mathbb{R},\ \widetilde{f}(r,\theta)=f(r\cos(\theta),r\sin(\theta)) \text{ et } \widetilde{g}(r,\theta)=g(r\cos(\theta),r\sin(\theta))$$

Pour $n\in\mathbb{Z}$, on note $\mathcal{E}_n$ l'espace des fonctions f de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^\star,\mathbb{C})$ telles que

$$\forall t\in\mathbb{R}_+^\star,\ t^2f''(t)+tf'(t)-n^2f(t)=0.$$

I.A –

I.A.1) Exprimer $\dfrac{\partial\widetilde{f}}{\partial r}(r,\theta)$ et $\dfrac{\partial\widetilde{f}}{\partial\theta}(r,\theta)$ en fonction de r,θ,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta),r\sin(\theta)) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta),r\sin(\theta)).$$

I.A.2) Pour tout $(r,\theta)\in\mathbb{R}_+^\star\times\mathbb{R}$, montrer

$$\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial r}(r,\theta)=\frac{1}{r}\times\frac{\partial\widetilde{g}}{\partial\theta}(r,\theta)\text{ et }\frac{\partial\widetilde{g}}{\partial r}(r,\theta)=-\frac{1}{r}\times\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial\theta}(r,\theta).$$

I.B – Pour $\alpha\in\mathbb{R}$, soit φ_α la fonction de $\mathbb{R}_+^\star$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall t\in\mathbb{R}_+^\star,\varphi_\alpha(t)=t^\alpha.$$

I.B.1) Pour tout $n\in\mathbb{Z}^\star$, déterminer les réels α tels que φ_α appartienne à $\mathcal{E}_n$.

I.B.2) Déterminer $\mathcal{E}_n$ pour $n\in\mathbb{Z}$. On discutera séparément le cas $n=0$.

I.C – Pour $n\in\mathbb{Z}$, soient $c_{n,f}$ et $c_{n,g}$ les fonctions de $\mathbb{R}_+^\star$ dans $\mathbb{C}$ définies par

$$\forall r\in\mathbb{R}_+^\star,\begin{cases}c_{n,f}(r)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\widetilde{f}(r,\theta)e^{-in\theta}d\theta\\ c_{n,g}(r)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\widetilde{g}(r,\theta)e^{-in\theta}d\theta.\end{cases}$$

I.C.1) Montrer que $c_{n,f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et vérifie

$$\forall r\in\mathbb{R}_+^\star,\big(c_{n,f}\big)'(r)=\frac{in}{r}c_{n,g}(r).$$

I.C.2) Montrer que $c_{n,f}$ appartient à $\mathcal{E}_n$ et que $c_{n,f}$ est bornée au voisinage de 0. En déduire l'existence de $a_n\in\mathbb{C}$ tel que

$$\forall r\in\mathbb{R}_+^\star,c_{n,f}(r)=a_nr^{|n|}.$$

I.C.3) En énonçant précisément le théorème utilisé, établir,

$$\forall(r,\theta)\in\mathbb{R}_+^\star\times\mathbb{R},\ \widetilde{f}(r,\theta)=\lim_{p\to+\infty}\sum_{n=-p}^{p}a_nr^{|n|}e^{in\theta}.$$

I.D – Dans cette question, on suppose que les fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont bornées sur $\mathbb{R}^2$.

I.D.1) Si $n\in\mathbb{Z}$, montrer que la fonction $(c_{n,f})'$ est bornée sur $\mathbb{R}_+^\star$.

I.D.2) Montrer que les fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont constantes.

II Quelques solutions de (1)

Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, on dit que $u\in\mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$ vérifie (**II.1**) sur I si et seulement si : $\forall t\in I,u(t)\big(u(t)+2tu'(t)\big)=-1$ (**II.1**)

II.A – Déterminer les fonctions de $\mathcal{P}_2$ vérifiant (1) sur $\mathbb{R}^2$.

II.B – En énonçant précisément le théorème utilisé, montrer, si (t_0, u_0) est dans $(\mathbb{R}^\star)^2$, l'existence d'un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ contenant t_0 et d'une fonction $u \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ telle que u soit solution de (**II.1**) sur I et vérifie $u(t_0) = u_0$.

II.C – Soit J un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$. Existe-t-il une fonction polynomiale solution de (**II.1**) sur J ?

II.D – Soient J un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, $\Omega(J) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, xy \in J\}$, w dans $\mathcal{C}^2(J, \mathbb{R})$ et W la fonction définie par : $\quad \forall (x, y) \in \Omega(J), W(x, y) = w(xy)$.

II.D.1) Montrer que $\Omega(J)$ est un ouvert non vide.

II.D.2) Montrer que W est dans $\mathcal{C}^2(\Omega(J), \mathbb{R})$ et que l'on a équivalence entre

i. W vérifie (1) sur $\Omega(J)$,

ii. w' vérifie (**II.1**) sur J.

II.D.3) Montrer que W est la restriction à $\Omega(J)$ d'une fonction de $\mathcal{P}_2$ si et seulement si w est affine.

II.E – Soient Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$, f dans $\mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$ vérifiant (1) sur Ω, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\Omega_{a,b}$ l'image de Ω par la translation de vecteur (a, b) et $f_{a,b}$ la fonction définie sur $\Omega_{a,b}$ par

$$\forall (x, y) \in \Omega_{a,b}, f_{a,b}(x, y) = f(x - a, y - b).$$

Montrer que $f_{a,b}$ vérifie (1) sur $\Omega_{a,b}$.

II.F – Si (x_0, y_0) est dans $\mathbb{R}^2$, montrer qu'il existe un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ contenant (x_0, y_0) tel que l'ensemble des fonctions de $\mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ vérifiant (1) sur U et ne coïncidant sur U avec aucun élément de $\mathcal{P}_2$ soit infini.

III Un critère de difféomorphisme

III.A – Rappeler la définition d'un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et le théorème caractérisant un tel difféomorphisme parmi les applications de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

Dans la suite de cette partie, on considère $\alpha \in \mathbb{R}_+^\star$ et $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$. On suppose que pour tout $(p, h) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, $\big(dF_p(h) | h\big) \geqslant \alpha \|h\|^2$.

Le but de cette partie est de montrer que F est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.

III.B – Soient p et q dans $\mathbb{R}^2$.

III.B.1) Vérifier $F(q) - F(p) = \displaystyle\int_0^1 dF_{p+t(q-p)}(q - p)dt$.

II.B.2) Montrer : $\big(F(q)-F(p)|q-p\big) \geqslant \alpha\|q-p\|^2$.

III.C – Soient $a \in \mathbb{R}^2$ et G^a l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall p \in \mathbb{R}^2, G^a(p) = \|F(p)-a\|^2.$$

III.C.1) Si p et h sont dans $\mathbb{R}^2$, calculer $dG^a_p(h)$.

III.C.2) Montrer que $G^a(p) \xrightarrow[\|p\|\to+\infty]{} +\infty$.

III.C.3) En déduire que G^a atteint un minimum global sur $\mathbb{R}^2$ en un point p_0.

III.C.4) Montrer que $F(p_0) = a$.

III.D – Montrer que F réalise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

IV Le théorème de Jörgens

Soit f dans $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ vérifiant (1) sur $\mathbb{R}^2$.

Pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, soient $u(x,y) = x + \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y), v(x,y) = y + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ et $F(x,y) = \big(u(x,y), v(x,y)\big)$.

On suppose dans les questions **IV.A** et **IV.B** que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) > 0$ pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

IV.A – Si $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, montrer que Jac $F(x,y) - I_2$ (où I_2 désigne la matrice identité d'ordre 2) est symétrique positive. En déduire que F est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Dans la suite, soient, pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$r(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y), s(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$ et $t(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$ de sorte que, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2, r(x,y) > 0$ et $r(x,y)t(x,y) - s(x,y)^2 = 1$.

IV.B –

IV.B.1) Montrer qu'il existe deux fonctions φ et ψ dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ telles que $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,$

$$\begin{cases} \varphi\big(u(x,y),v(x,y)\big) = x - \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \psi\big(u(x,y),v(x,y)\big) = -y + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{cases}$$

IV.B.2) Calculer $\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}\big((x,y),v(x,y)\big), \dfrac{\partial \varphi}{\partial v}\big(u(x,y),v(x,y)\big),$

$$\frac{\partial \psi}{\partial u}\big((x,y),v(x,y)\big), \frac{\partial \psi}{\partial v}\big(u(x,y),v(x,y)\big)$$

(que l'on abrégera en $\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}, \dfrac{\partial \varphi}{\partial v}, \dfrac{\partial \psi}{\partial u}, \dfrac{\partial \psi}{\partial v}$ en fonction de $r(x,y), s(x,y)$ et $t(x,y)$ (que l'on abrégera en r, s et t).

IV.B.3) Montrer que $\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial \varphi}{\partial v}$ sont bornées sur $\mathbb{R}^2$.

IV.B.4) Montrer, en utilisant la première partie, que $\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial \varphi}{\partial v}$ sont constantes.

IV.B.5) En déduire que r, s et t sont constantes.

IV.C – Montrer que les seules fonctions de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ vérifiant (1) sur $\mathbb{R}^2$ appartiennent à $\mathcal{P}_2$.

Solution

Partie I -

I.A -

I.A.1) Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, il en est de même de $\widetilde{f}$ et, par théorème de composition, on a :

$$\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial r}(r,\theta) = \cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) + \sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)).$$

$$\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial \theta}(r,\theta) = -r\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) + r\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)).$$

I.A.2) De même, on a :

$$\frac{\partial \widetilde{g}}{\partial r}(r,\theta) = \cos(\theta)\frac{\partial g}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) + \sin(\theta)\frac{\partial g}{\partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)).$$

$$\frac{\partial \widetilde{g}}{\partial \theta}(r,\theta) = -r\sin(\theta)\frac{\partial g}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) + r\cos(\theta)\frac{\partial g}{\partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)).$$

Les équations de Cauchy-Riemann impliquent :

$$\frac{\partial \widetilde{g}}{\partial r}(r,\theta) = -\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) + \sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)).$$

$$\frac{\partial \widetilde{g}}{\partial \theta}(r,\theta) = r\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta), r\cos(\theta)) + r\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)).$$

Donc $\dfrac{\partial \widetilde{g}}{\partial r}(r,\theta) = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial \theta}(r,\theta)$ et $\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \widetilde{g}}{\partial \theta}(r,\theta) = \dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial r}(r,\theta)$.

I.B -

I.B.1) Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}, \varphi_\alpha \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^\star, \mathbb{R}), \varphi_\alpha'(t) = \alpha t^{\alpha-1}, \varphi_\alpha''(t) = \alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2}$.

$\varphi_\alpha \in \mathcal{E}_n \iff \forall t \in \mathbb{R}_+^\star, (\alpha^2 - n^2)t^\alpha = 0 \iff \alpha = \pm n$.

I.B.2) L'équation différentielle linéaire homogène $t^2y'' + ty' - n^2y = 0$ a ses coefficients fonctions continues sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et le coefficient de y'' non nul. L'espace vectoriel $\mathcal{E}_n$ de ses solutions est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension 2.

• Si $n \in \mathbb{Z}^\star$, les fonctions φ_n et φ_{-n} constituent un système fondamental de solutions car elles sont solutions d'après B.1) et $(\varphi_n, \varphi_{-n})$ est libre trivialement. On a donc $\mathcal{E}_n = \mathrm{Vect}(\varphi_n, \varphi_{-n})$ dans ce cas.

• Si $n = 0$, on a, d'après B.1) $\mathrm{Vect}(\varphi_0) \subset \mathcal{E}_n$.

$$f \in \mathcal{E}_0 \iff \forall t \in \mathbb{R}_+^\star, tf''(t) + f'(t) = 0 \iff \forall t \in \mathbb{R}_+^\star, \frac{d}{dt}\big(tf'(t)\big) = 0.$$

Donc $f \in \mathcal{E}_0 \iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}_+^\star, f(t) = a\ln(t) + b$.
Donc $\mathcal{E}_0 = \mathrm{Vect}(\varphi_0, \ln)$.

I.C -

I.C.1) Notons $h : \mathbb{R}_+^\star \times [-\pi, \pi], (r, \theta) \mapsto \widetilde{f}(r, \theta) e^{-in\theta}$. Comme $\widetilde{f} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, la fonction h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^\star \times [-\pi, \pi]$. Il s'ensuit que 4 des cinq hypothèses du théorème de dérivation sous le signe somme sont vérifiées. Il nous reste à prouver la condition de domination.

Si $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^\star$, notons $K = [a, b] \times [-\pi, \pi]$ compact de $\mathbb{R}^2$.

Comme $\dfrac{\partial h}{\partial r}(r, \theta) = \dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial r}(r, \theta) e^{-in\theta}$, la fonction $(r, \theta) \mapsto \dfrac{\partial h}{\partial r}(r, \theta)$ est continue sur le compact K de $\mathbb{R}^2$. Elle y est bornée. Soit $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall (r, \theta) \in K, \left|\dfrac{\partial h}{\partial r}(r, \theta)\right| \leqslant M$. La fonction constante $\theta \mapsto M$ étant continue donc intégrable sur le segment $[-\pi, \pi]$, toutes les hypothèses du théorème sont vérifiées. Donc $c_{n,f} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^\star, \mathbb{C})$ et $c'_{n,f}(r) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \dfrac{\partial h}{\partial r}(r, \theta) d\theta$.

$$i.e.\ c'_{n,f}(r) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial r}(r, \theta) e^{-in\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi r}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial \widetilde{g}}{\partial \theta}(r, \theta) e^{-in\theta} d\theta,$$

d'après I.A.2). Comme les fonctions $\theta \mapsto \widetilde{g}(r, \theta)$ et $\theta \mapsto e^{-in\theta}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, par intégration par parties,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial \widetilde{g}}{\partial \theta}(r, \theta) e^{-in\theta} d\theta = \Big[\widetilde{g}(r, \theta) e^{-in\theta}\Big]_{-\pi}^{\pi} + ni\int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{g}(r, \theta) e^{-in\theta} d\theta.$$

La fonction $\theta \mapsto \widetilde{g}(r, \theta) e^{-in\theta}$ étant 2π-périodique, le « crochet » est nul et l'on obtient : $\forall r \in \mathbb{R}_+^\star, c'_{n,f}(r) = \dfrac{in}{r} c_{n,g}(r)$.

I.C.2) Comme g vérifie les mêmes hypothèses que f, on a $c_{n,g} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^\star, \mathbb{C})$ et

$$\forall r \in \mathbb{R}_+^\star, c'_{n,g}(r) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial \widetilde{g}}{\partial r}(r, \theta) e^{-in\theta} d\theta = -\frac{1}{2\pi r}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial \theta}(r, \theta) e^{-in\theta} d\theta,$$

$i.e.$ $\forall r \in \mathbb{R}_+^\star, c'_{n,g}(r) = -\dfrac{in}{r} c_{n,f}(r)$.

Il s'ensuit que $c_{n,f}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^\star$ et

$$\forall r \in \mathbb{R}_+^\star, c''_{n,f}(r) = -\frac{in}{r^2} c_{n,g}(r) + \frac{n^2}{r^2} c_{n,f}(r) = -\frac{1}{r} c'_{n,f}(r) + \frac{n^2}{r^2} c_{n,f}(r).$$

Donc $r \mapsto c_{n,f}(r)$ appartient à $\mathcal{E}_n$.

Soit $\mathcal{B}$ la boule unité fermée de $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$. Comme f est continue sur $\mathbb{R}^2$, elle est bornée sur $\mathcal{B}$. Soit $M_1 \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall (x,y) \in \mathcal{B}, |f(x,y)| \leqslant M_1$.

Donc, pour tout $(r,\theta) \in]0,1] \times [-\pi,\pi], |\widetilde{f}(r,\theta)| \leqslant M_1$. Il s'ensuit que pour tout $r \in]0,1], |c_{n,f}(r)| \leqslant M_1$. La fonction $r \mapsto c_{n,f}(r)$ est bornée au voisinage de 0. Or $c_{n,f} \in \mathcal{E}_n$. Si $n = 0$, comme ln n'est pas bornée au voisinage de 0, la seule possibilité est $c_{0,f} \in \mathrm{Vect}(\varphi_0)$. Si $n \in \mathbb{Z}^\star$, comme $\mathcal{E}_n = \mathrm{Vect}(\varphi_{|n|}, \varphi_{-|n|})$. Comme $\varphi_{-|n|}$ n'est pas bornée au voisinage de 0, $c_{n,f} \in \mathrm{Vect}(\varphi_{|n|})$. On conclut que : $\forall n \in \mathbb{Z}, \exists a_n \in \mathbb{C}, \forall r \in \mathbb{R}_+^\star, c_{n,f}(r) = a_n r^{|n|}$.

I.C.3) Pour $r \in \mathbb{R}_+^\star$ fixé, la fonction $\theta \mapsto \widetilde{f}(r,\theta)$ est élément de $\mathcal{C}^1_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, on déduit du théorème de convergence normale que sa série de Fourier converge normalement sur $\mathbb{R}$ et a pour somme $\theta \mapsto \widetilde{f}(r,\theta)$. Comme ses coefficients de Fourier exponentiels sont les $c_{n,f}(r)$, on a :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \widetilde{f}(r,\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n r^{-|n|} e^{in\theta}.$$

I.D -

I.D.1) D'après I.A.1), si les fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont bornées sur $\mathbb{R}^2$, les fonctions $\dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial r}$ sont bornées sur $\mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}$. Soit $M_2 \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}, \left|\dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial r}(r,\theta)\right| \leqslant M_2$. Alors $\forall r \in \mathbb{R}_+^\star, \forall n \in \mathbb{Z}, |c'_{n,f}(r)| \leqslant M_2$.

I.D.2) Or $c'_{n,f}(r) = |n| a_n r^{|n|-1}$. Donc $\forall r \in \mathbb{R}_+^\star, \forall n \in \mathbb{Z}^\star, |n a_n| \leqslant \dfrac{M}{r^{|n|-1}}$.

Pour $n \in \mathbb{Z}, |n| \geqslant 2$ fixé, $\displaystyle\lim_{r\to+\infty} \frac{M}{r^{|n|-1}} = 0$. Donc $\forall n \in \mathbb{Z}, |n| \geqslant 2, a_n = 0$.

On déduit de I.C.3) que : $\forall r \in \mathbb{R}_+^\star, \forall \theta \in \mathbb{R}, \widetilde{f}(r,\theta) = a_0 + r(a_1 e^{i\theta} + a_{-1} e^{-i\theta})$.
D'où $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = a_0 + (a_1 + a_{-1})x + i(a_1 - a_{-1})y$.
Les fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont donc constantes sur $\mathbb{R}^2$.

Partie II -

II.A - On montre aisément que $(x,y) \mapsto ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$ vérifie (1) si, et seulement si, $4ac - b^2 = 1$.

II.B - La fonction $\Phi : \mathbb{R}^\star \times \mathbb{R}^\star, (t,x) \mapsto -\dfrac{1}{2t}\left(\dfrac{1}{x} + x\right)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^\star \times \mathbb{R}^\star$ de $\mathbb{R}^2$. Il découle du théorème de Cauchy-Lipschitz pour les équations différentielles non linéaires et non autonomes qu'il existe une unique solution maximale au problème de Cauchy $\begin{cases} u' = \Phi(t,u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$, solution définie sur un intervalle I ouvert de $\mathbb{R}$ contenant t_0.

***II.C* -** Notons que (II.1) équivaut à $\forall t\in I,\ \dfrac{d}{dt}\big(tu^2(t)\big)=-1$.
i.e. $\forall t\in I, tu^2(t)=-t+k, k\in\mathbb{R}$.

Il s'ensuit que si u est une solution polynomiale, alors u est constante puisque $\deg(Xu^2(X))=2\deg(U)+1$. Ceci est impossible puisque $u^2=-1$ l'est avec u réel.

***II.D* -**
II.D.1) $\Omega(J)$ est l'image réciproque de l'intervalle ouvert I par l'application continue car polynomiale $(x,y)\mapsto xy$, donc $\Omega(J)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

$\Omega(J)\neq\emptyset$ car J est non vide et $\{1\}\times J\subset\Omega(J)$
II.D.2) L'application $(x,y)\mapsto xy$ polynomiale est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$. Comme $w\in\mathcal{C}^2(J,\mathbb{R})$, par théorème de composition, $W\in\mathcal{C}^2(\Omega(J),\mathbb{R})$.

$\forall(x,y)\in\Omega(J), \dfrac{\partial^2W}{\partial x^2}(x,y)=y^2w''(xy), \dfrac{\partial^2W}{\partial y^2}(x,y)=x^2w''(xy)$ et

$\dfrac{\partial^2W}{\partial x\partial y}(x,y)=xy\,w''(xy)$. Donc W vérifie (1) sur $\Omega(J)$ si, et seulement si,

$\forall(x,y)\in\Omega(J), \big(xyw''(xy)\big)^2-\big(w'(xy)-xyw''(xy)\big)^2=1 \qquad (i).$

$(i)\iff\forall(x,y)\in\Omega(J), w'(xy)\big(w'(xy)+2xyw''(xy)\big)=-1.$

Donc si w' vérifie (2) sur J, alors W vérifie (1) sur $\Omega(J)$.

Réciproquement, si W vérifie (1) sur $\Omega(J)$, alors $w'(t)\big(w'(t)+2tw''(t)\big)=-1$ pour tout $t\in J$ en posant $(x,y)=(1,t)$. Donc w' vérifie (1) sur J.

II.D.3) Si w est affine, il existe $a,b\in\mathbb{R}$ tel que $\forall t\in J, w(t)=at+b$.

Alors, pour tout $(x,y)\in\Omega(J), W(x,y)=axy+b$; W est la restriction à $\Omega(J)$ d'un élément de $\mathcal{P}_2$.

Réciproquement, supposons que W est la restriction à $\Omega(J)$ d'un élémet de $\mathcal{P}_2$. Les fonctions $\dfrac{\partial^2W}{\partial x^2}$ et $\dfrac{\partial^2W}{\partial y^2}$ sont des constantes α,β sur $\Omega(J)$.

D'autre part, $\dfrac{\partial^2W}{\partial x^2}(x,y)=y^2w''(xy), \dfrac{\partial^2W}{\partial y^2}(x,y)=x^2w''(xy)$. Si w'' n'est pas la fonction nulle sur J, il existe $t_0\in J\setminus\{0\}$ tel que $w''(t_0)\neq0$. On peut alors trouver $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ tel que $x_0y_0=t_0$ et $\alpha x_0^2\neq\beta y_0^2$: absurde. Donc $w''=0$ sur J et donc w est une fonction affine.

***II.E* -** Vérification immédiate.

***II.F* -** De la question précédente, on déduit que l'on peut supposer que $(x_0,y_0)\in(\mathbb{R}^\star)^2$. Soit $t_0=x_0y_0$ et $u_0\in\mathbb{R}^\star$. D'après II.B), il existe un intervalle ouvert J contenant t_0 et une fonction $u\in\mathcal{C}^1(J,\mathbb{R})$ telle que $u(t_0)=u_0$, vérifiant (II.1) sur J. Pour toute primitive w de u sur J, la fonction W définie en II.D. est solution de (1) sur $U=\Omega(J)$. Compte tenu des constantes d'intégration, il existe une infinité de fonctions de $\mathcal{C}^2(U,\mathbb{R})$ vérifiant