Centrale/Supélec Filière MP 2006 Épreuve 1

Problèmes asymptotiques liés à la longueur d'une ellipse

Notations et objectifs du problème

• On rappelle qu'une ellipse d'un plan affine euclidien, de demi-axes a et b $(a > b > 0)$, notée $(E_{a,b})$ admet, dans un certain repère orthonormé, une représentation paramétrique de la forme : $x = a\cos(t),\ y = b\sin(t)$ (t décrit un segment de longueur 2π).

• $\mathcal{C}_{2\pi}$ désigne le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, 2π-périodiques, à valeurs complexes. On munit cet espace du produit scalaire défini par : $\big(f|g\big) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(t)}g(t)dt$

• Pour $k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ on rappelle les expressions des coefficients de Fourier exponentiels et trigonométriques de f, utiles dans le problème :

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt,\ a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)dt.$$

• **Dans tout le problème** r désignera un nombre réel **appartenant à l'intervalle ouvert** $]0,1[$ et f_r l'élément de défini par : $t \mapsto |1 - re^{it}|$.
On désignera aussi par $\mathcal{S}_r$ l'ensemble des suites réelles $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant, pour tout entier naturel non nul n, la relation :

$$r(2n+3)a_{n+1} - (1+r^2)2na_n + r(2n-3)a_{n-1} = 0$$

et $\mathcal{B}_r$ le sous-ensemble de $\mathcal{S}_r$ constitué des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ telles que le rayon de convergence de la série entière de terme général $a_n z^n$ soit au moins égal à 1

• Dans tout le problème $(\alpha_n)_{n\geqslant 0}$ sera la suite réelle définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $\alpha_n = -\dfrac{1}{4^n(2n-1)}\begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix}\cdot$ (Les candidats qui le préfèrent pourront aussi noter $\binom{2n}{n}$ le coefficient binomial).

• La partie entière du réel x est notée $[x]$.
L'attention des candidats est attirée sur le fait que la notation $\sqrt{z}$ ne sera prise en considération que lorsque z est un nombre réel positif.

• L'objectif du problème est l'étude de quelques problèmes asymptotiques relatifs à la longueur, notée $L(a,b)$, de l'ellipse $(E_{a,b})$.

Partie I - Préliminaires

I.A - Préciser sur un dessin la signification géométrique du paramètre t intervenant dans le paramétrage de $E_{a,b}$.

I.B - Prouver rapidement que $\mathcal{S}_r$ et $\mathcal{B}_r$ sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels et préciser la dimension de $\mathcal{S}_r$.

I.C - Donner sans démonstration l'énoncé précis du théorème de Parseval relatif à un élément $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ (les coefficients de Fourier intervenant dans la formule seront les coefficients exponentiels).

Si f et g sont deux éléments de $\mathcal{C}_{2\pi}$ prouver, en justifiant d'abord la convergence absolue de la série, la formule

$$(f|g) = \overline{c_0(f)}c_0(g) + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{c_n(f)}\, c_n(g) + \overline{c_{-n}(f)}c_{-n}(g).$$

I.D - Soit n un entier naturel. Exprimer $a_n(f_r)$ à l'aide de $c_n(f_r)$.

I.E - Soient a et b deux réels vérifiant $a > b > 0$. On pose $r = \dfrac{a-b}{a+b}\cdot$

Exprimer, en fonction de a, b et de constantes, le réel $\dfrac{L(a,b)}{a_0(f_r)}\cdot$

Partie II - Comportement asymptotique de la suite $(a_n(f_r))_{n\geqslant 0}$

II.A - Déterminer le rayon de convergence R de la série entière de terme général $\alpha_n z^n$. On notera $f(z)$ sa somme dans le disque ouvert complexe de centre 0 et de rayon R.

II.B - Soit x un réel appartenant à l'intervalle ouvert $]-R, R[$. Donner une relation entre $(1-x)f'(x)$ et $f(x)$. En déduire une expression simple de la restriction de f à l'intervalle ouvert $]-R, R[$.

II.C - On choisit maintenant un complexe z tel que $|z| < R$. Déterminer une expression très simple de $f(z)^2$.

II.D - Prouver, pour $r \in]0,1[$ et $t \in \mathbb{R}$, la relation: $|f(re^{it})|^2 = f_r(t)$.

II.E - Soit n un entier naturel. En utilisant la question I.C et la précédente, prouver l'égalité : $\dfrac{c_n(f_r)}{a_n r^n} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \alpha_{[x]} \frac{\alpha_{n+[x]}}{\alpha_n}\, r^{2[x]} dx.$

En déduire la limite de cette suite quand l'entier n tend vers l'infini.

II.F - Prouver que : $a_n(f_r) \underset{n\to\infty}{\sim} -\dfrac{\sqrt{1-r^2}\, r^n}{\sqrt{\pi}\, n^{3/2}}\cdot$

En quoi ce résultat corrobore-t-il votre cours sur les séries de Fourier ?

Partie III - Approximation de $L(a,b)$

III.A - Déterminer une équation différentielle linéaire du premier ordre satisfaite par f_r. En déduire que la suite $(a_n(f_r))_{n\geqslant 0}$ appartient à $\mathcal{B}_r$.

III.B - Pour tout réel $r \in]0,1[$, on définit deux suites $(A_n(r))_{n\geqslant 0}$ et $(B_n(r))_{n\geqslant 0}$ par : $A_0(r) = 1 = B_1(r)$, $B_0(r) = 0$, $A_1(r) = -\dfrac{2}{r}(1+r^2)$.
et les relations de récurrence, valables pour $n \geqslant 2$

$$A_n(r) = \frac{2n(1+r^2)}{r(2n-3)}A_{n-1}(r) - \Big(\frac{2n+1}{2n-5}\Big)A_{n-2}(r)$$

$$B_n(r) = \frac{2n(1+r^2)}{r(2n-3)}B_{n-1}(r) - \Big(\frac{2n+1}{2n-5}\Big)B_{n-2}(r)$$

on définit également, pour $n \geqslant 1$, la matrice $M_n(r)$ par :

$$M_n(r) = \begin{pmatrix} A_n(r) & -\dfrac{2n+3}{2n-3}A_{n-1}(r) \\ B_n(r) & -\dfrac{2n+3}{2n-3}B_{n-1}(r) \end{pmatrix}.$$

Pour alléger la rédaction, les candidats pourront remplacer, chaque fois que cela leur paraîtra utile, les expressions $A_n(r), B_n(r), M_n(r)$, A_n, B_n, M_n.

Pour $n \geqslant 1$, déterminer une matrice T_n, dont les coefficients dépendent de n et r, telle que pour toute suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ appartenant à $\mathcal{S}_r$ on ait :

$$\begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix} = T_n \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Écrire, dans le langage de calcul formel de votre choix, des fonctions prenant en argument l'entier n et retournant a_n, A_n, B_n; a_0, a_1 et r seront considérés comme des variables globales. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$ on a $M_n = M_{n-1}T_n$.

En déduire le produit matriciel $M_n \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix}$ indépendamment de n.

III.C - Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle qu'existent une suite (ε_n) tendant vers 0, un réel ℓ, un réel $k \in]0,1[$ et un entier N vérifiant : $\forall n > N, |u_n - \ell| \leqslant k|u_{n-1} - \ell| + \varepsilon_n$
Montrer que $\lim(u_n) = \ell$.

III.D - Prouver que $\lim(A_n a_n(f_r) = \dfrac{a_0(f_r)}{1-r^2}\cdot$ Que dire de la suite de terme général $B_n a_n(f_r)$ lorsque n tend vers l'infini ?

III.E - Soient a et b deux réels tels que $a > b > 0$. On pose $r = \dfrac{a-b}{a+b}\cdot$
À l'aide des questions II.E et III.D, démontrer que la suite (ℓ_n) définie par : $\ell_0 = (a+b)\pi(1-r^2)^{3/2}$; $\ell_1 = \ell_0(1+r^2)$;

$\ell_n = (1+r^2)\ell_{n-1} - \dfrac{r^2(2n+1)(2n-3)}{4n(n-1)}\,\ell_{n-2}$ converge vers $L(a,b)$.

Partie IV Étude de $\mathcal{S}_r$ et de $\mathcal{B}_r$

IV.A - Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ un élément de $\mathcal{S}_r$. Prouver l'égalité :

$$a_1 A_n - a_0 B_n = a_{n+1}\det(M_n)$$

IV.B - Calculer $\det(T_n)$ puis $\det(M_n)$. Donner un équivalent de $\det(M_n)$

IV.C - Préciser la dimension et une base de $\mathcal{B}_r$. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ un élément de $\mathcal{S}_r$ qui n'appartient pas à $\mathcal{B}_r$ Déterminer un équivalent simple de a_n lorsque n tend vers l'infini.

Connaissances utiles

- Longueur d'un arc paramètré.
- Séries de fonctions.
- Séries de Fourier.
- Intégration sur un intervalle.
- Espaces préhilbertiens complexes.

Solution

Partie I

I.A. L'ellipse $E_{a,b}$ est l'image du cercle de centre 0 et de rayon a paramétré par $x = a\cos(t)$, $y = a\sin(t)$, par l'affinité qui au point $M(x, y)$ associe le point $M'\left(x, \dfrac{b}{a}y\right)$. Donc t est l'angle polaire $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM})$.

I.B. $\mathcal{S}_r$ et $\mathcal{B}_r$ sont non vides car ils contiennent la suite nulle.

Soient (a_n) et (b_n) sont deux suites de $\mathcal{S}_r$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \geqslant 1$,
$r(2n+3)a_{n+1} - (1+r^2)2na_n + r(2n-3)a_{n-1} = 0$,
$r(2n+3)b_{n+1} - (1+r^2)2nb_n + r(2n-3)b_{n-1} = 0$.
Par addition de la première égalité multipliée par λ et de seconde, on obtient, en notant $c_n = \lambda a_n + b_n$,

$\forall n \geqslant 1,\ r(2n+3)c_{n+1} - (1+r^2)2nc_n + r(2n-3)c_{n-1} = 0$
ce qui traduit que $(c_n)_{n\geqslant 0}$ appartient à $\mathcal{S}_r$.

Donc $\mathcal{S}_r$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Le rayon de convergence de la somme de deux séries entières est supérieur ou égal au minimum des rayons des deux séries entières. Si $\sum a_n z^n$ est de rayon de convergence R le rayon de convergence de $\sum \lambda a_n z^n$ est $R' \geqslant R$. Donc $\mathcal{B}_r$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}_r$.

On vérifie que $\varphi : \mathcal{S}_r \to \mathbb{R}^2, (a_n) \mapsto (a_0, a_1)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels, d'où $\dim\left[\mathcal{S}_r\right] = 2$.

I.C. Si $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ alors la série $\sum \left(|c_n(f)|^2 + |c_{-n}(f)|^2\right)$ converge et

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 \ ; \ S_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} c_n(f) e_n \text{ alors } \|S_n(f) - f\|^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Tout ceci constitue le théorème de Parseval demandé.

Pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2, 2|ab| \leqslant a^2 + b^2$. Donc
$2\left|\overline{c_n(f)} c_n(g)\right| \leqslant |c_n(f)|^2 + |c_n(g)|^2$ et
$2\left|\overline{c_{-n}(f)} c_{-n}(g)\right| \leqslant |c_{-n}(f)|^2 + |c_{-n}(g)|^2$. D'après le théorème de Parseval, la série demandée converge absolument.

Première méthode : le résultat découle de l'identité de polarisation dans les espaces préhibertiens complexes et du théorème de Parseval. En effet,

$$4\big(f|g\big) = \|g+f\|^2 - \|g-f\|^2 + i\|g+if\|^2 - i\|g-if\|^2.$$

Deuxième méthode : comme la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base orthonormale de l'espace vectoriel des polynômes trigonométriques, on a

$$\big(S_n(f)|S_n(g)\big) = \sum_{k=-n}^{n} \overline{c_k(f)}\, c_k(g).$$

Or $\big(f|g\big) - \big(S_n(f)|S_n(g)\big) = \big(f - S_n(f)|g\big) + \big(S_n(f)|g - S_n(g)\big)$.
De l'inégalité de Cauchy-Schwarz et du théorème de Parseval, on déduit que
$\left|\big(f|g\big) - \big(S_n(f)|S_n(g)\big)\right| \leqslant \|f - S_n(f)\|_2 \|g\|_2 + \|g - S_n(g)\|_2 \|f\|_2$.
Par encadrement, compte tenu du théorème de Parseval, on obtient :
$\big(f|g\big) - \big(S_n(f)|S_n(g)\big) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
Comme la série $\sum \left(\overline{c_n(f)}\, c_n(g) + \overline{c_{-n}(f)} c_{-n}(g)\right)$ est convergente, le résultat est prouvé par passage à la limite.

I.D. $f_r(t) = |1 - re^{it}| = |\overline{1 - re^{it}}| = |1 - re^{-it}| = f_r(-t)$. La fonction f_r est paire et élément de $\mathcal{C}_{2\pi}$. Donc $a_n(f_r) = 2c_n(f_r)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

I.E. $1 - re^{it} = 1 - \dfrac{a-b}{a+b} e^{it} = \dfrac{1}{a+b}\left[a(e^{it}+1) - b(e^{it}-1)\right]$.

Donc $1 - re^{it} = \dfrac{2e^{\frac{it}{2}}}{a+b}\left[a\cos\left(\dfrac{t}{2}\right) - ib\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)\right]\cdot$

Donc $f_r(t) = \dfrac{2}{a+b}\sqrt{a^2\cos^2\left(\dfrac{t}{2}\right) + b^2\sin^2\left(\dfrac{t}{2}\right)}$. La fonction f_r étant paire,

$$a_0(f_r) = \frac{4}{\pi(a+b)} \int_0^{\pi} \sqrt{a^2\cos^2\left(\frac{t}{2}\right) + b^2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}\, dt.$$

Par le changement de variable linéaire $t = 2u$,

$$a_0(f_r) = \frac{8}{\pi(a+b)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2\cos^2(u) + b^2\sin^2(u)}\, du.$$

$$L(a,b) = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2\sin^2(t) + b^2\cos^2(t)}\, dt$$

compte tenu des symétries de l'ellipse. Le changement de variable affine

$t = \dfrac{\pi}{2} - u$ donne $L(a,b) = 4\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2\cos^2(u) + b^2\sin^2(u)}\,du$.

Donc $\dfrac{L(a,b)}{a_0(f_r)} = \dfrac{\pi}{2}(a+b)$.

Partie II

II.A. Comme $\alpha_n = -\dfrac{(2n)!}{(2n!)^2(2n-1)} \neq 0$, alors $\dfrac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \dfrac{n-\frac{1}{2}}{n+1}\cdot$ Soit $z \neq 0$.
Comme $\left|\dfrac{\alpha_{n+1}z^{n+1}}{\alpha_n z^n}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} |z|$, le rayon de convergence R de la série entière $\sum \alpha_n z^n$ est égal à 1 d'après la règle de d'Alembert sur les séries réelles.

II.B. On déduit du calcul précédent que $(n+1)\alpha_{n+1} = \left(n - \dfrac{1}{2}\right)\alpha_n$.

Donc, $\forall x \in]-1,1[, \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\alpha_{n+1}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(n-\frac{1}{2}\right)\alpha_n x^n$.

Or $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\alpha_{n+1}x^n = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_{n+1}x^{n+1}\right) = \frac{d}{dx}\big(f(x) - \alpha_0\big) = f'(x)$,

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(n-\frac{1}{2}\right)\alpha_n x^n = x\sum_{n=1}^{\infty} n\alpha_n x^{n-1} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n x^n = xf'(x) - \frac{1}{2}f(x)$.

Donc, $\forall x \in]-1,1[, (1-x)f'(x) = -\dfrac{1}{2}f(x)$.

La fonction f est solution du problème de Cauchy : $\begin{cases}(1-x)y' + \dfrac{1}{2}y = 0 \\ y(0) = 1\end{cases}$

La solution générale sur $]-1,1[$ de l'équation différentielle linéaire homogène $(1-x)y' + \dfrac{1}{2}y = 0$ étant $y : x \mapsto C\sqrt{1-x}$ où $C \in \mathbb{R}$, on conclut que : $\forall x \in]-1,1[, f(x) = \sqrt{1-x}$.

II.C. Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < 1$. D'après le théorème sur le produit de deux séries entières, $\big(f(z)\big)^2 = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n z^n$ où $\beta_n = \displaystyle\sum_{p+q=n}\alpha_p\alpha_q$.

En particulier, pour $z = x \in]-1,1[$, $1 - x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n x^n$.

Par unicité du DSE de la fonction $x \mapsto 1-x$ en 0, on a $\forall n \geqslant 2, \beta_n = 0$. Donc $f^2(z) = 1 - z$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$.

II.D. $\forall t \in \mathbb{R}, \forall r \in]0,1[, \left|f(re^{it})\right|^2 = \left|f^2(re^{it})\right| = |1 - re^{it}| = f_r(t)$, d'après II.C.

II.E. $c_n(f_r) = \big(e_n|f_r\big) = \big(e_n|g\,\overline{g}\big) = \big(e_n g|g\big)$ où $g(t) = f(re^{it})$.

$g(t) = \displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \alpha_p r^p e^{ipt}$ et $(e_n g)(t) = \displaystyle\sum_{p=n}^{\infty} \alpha_{p-n} r^{p-n} e^{ipt}$.

Les séries de fonctions $t \mapsto \alpha_p r^p e^{ipt}$ et $t \mapsto \alpha_{p-n} r^{p-n} e^{ipt}$ étant normalement convergentes sur $\mathbb{R}$, on déduit que les coefficients de Fourier des fonctions g et $e_n g$ de $\mathcal{C}_{2\pi}$ sont :

$c_p(g) = \begin{cases} \alpha_p r^p & \text{si } p \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{si } p \in \mathbb{Z}_-^\star \end{cases}$ et $c_p(e_n g) = \begin{cases} \alpha_{p-n} r^{p-n} & \text{si } p \geqslant n \\ 0 & \text{si } p < n \end{cases}$

On déduit de I.C. que $c_n(f_r) = \displaystyle\sum_{p=n}^{\infty} \alpha_p \alpha_{p-n} r^{2p-n} = \sum_{p=0}^{\infty} \alpha_p \alpha_{p+n} r^{2p+n}$.

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}, \dfrac{c_n(f_r)}{\alpha_n r^n} = \displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \alpha_p \frac{\alpha_{p+n}}{\alpha_n} r^{2p}$.

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$ la fonction constante par morceaux définie sur $[0, +\infty[$ par $\varphi_n(x) = \alpha_{[x]} \dfrac{\alpha_{n+[x]}}{\alpha_n} r^{2[x]}$.

D'après II.A. la suite $(|\alpha_p|)_{p \geqslant 0}$ est décroissante et $\alpha_0 = 1$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+, [x] \leqslant x < [x] + 1$. Comme $0 < r < 1$, on a $r^{[x]} \leqslant \dfrac{r^{2x}}{r^2}\cdot$

$r^{2x} = e^{2x\ln(r)}$. Comme $\ln(r) < 0$, la fonction continue $x \mapsto \dfrac{r^{2x}}{r^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$. De plus $|\varphi_n(x)| \leqslant \dfrac{r^{2x}}{r^2}$ pour tout $x \in [0, +\infty[$. Donc φ_n est intégrable sur $[0, +\infty[$ et

$$\int_0^{+\infty} \varphi_n = \sum_{p=0}^{\infty} \Big(\int_p^{p+1} \varphi_n(x)dx \Big) = \sum_{p=0}^{\infty} \alpha_p \frac{\alpha_{p+n}}{\alpha_n} r^{2p} = \frac{c_n(f_r)}{\alpha_n r^n}\cdot$$

Si $x \in [0, 1[\,, \dfrac{\alpha_{n+[x]}}{\alpha_n} = 1$ et si $x \in [1, +\infty[\,, \dfrac{\alpha_{n+[x]}}{\alpha_n} = \displaystyle\prod_{p=0}^{[x]-1} \frac{\alpha_{p+1+n}}{\alpha_{p+n}}\cdot$

D'après II.A. $\dfrac{\alpha_{n+[x]}}{\alpha_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

La suite de fonctions $(\varphi_n)_{n \geqslant 0}$ converge donc simplement vers φ définie par $\varphi(x) = \alpha_{[x]} r^{2[x]}$ et $|\varphi_n| \leqslant |\varphi|$.

D'après le théorème de convergence dominée,

$$\int_0^{+\infty} \varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^{+\infty} \varphi = \int_0^{+\infty} \alpha_{[x]} r^{2[x]} dx = \sum_{p=0}^{\infty} \Big(\int_p^{p+1} \alpha_{[x]} r^{2[x]} dx \Big).$$

Ainsi, $\dfrac{c_n(f_r)}{\alpha_n r^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \alpha_p r^{2p} = f(r^2) = \sqrt{1 - r^2}$.

II.F. D'après la formule de Striling, $n! \underset{n\to\infty}{\sim} \left(\dfrac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$.

Donc $\alpha_n \underset{n\to\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2\sqrt{\pi}\,n^{3/2}}\cdot$ Comme $a_n(f_r) = 2c_n(f_r)$, le résultat découle alors de II.E.

Comme produit des deux fonctions g et $\overline{g}$ de $\mathcal{C}_\infty(\mathbb{R})$, la fonction f_r est de classe $\mathcal{C}_\infty$ sur $\mathbb{R}$. Le résultat obtenu confirme que $c_k(f_r) \underset{n\to\infty}{=} o\big(n^{-k}\big)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ puisque $r^n \underset{n\to\infty}{=} o\big(n^{-k}\big)$.

Partie III

III.A. $\forall t \in \mathbb{R}, f_r'(t) = \dfrac{2r\sin(t)}{\sqrt{1-2r\cos(t)+r^2}} = \dfrac{r\sin(t)}{f_r(t)}\cdot$

D'où : $\forall t \in \mathbb{R}$, $(1-2r\cos(t)+r^2)f_r'(t) = rf_r(t)\sin(t)$.

i.e. $(1+r^2-r(e_1+e_{-1}))f_r' + \dfrac{ir}{2}(e_1-e_{-1})f_r = 0 \qquad (\star)$.

Or $h=0 \Rightarrow c_n(h)=0$, l'application $\mathcal{C}_{2\pi} \to \mathbb{C}, u \mapsto c_n(u)$ est linéaire, $c_n(h') = inc_n(h)$, $c_n(e_1h) = c_{n-1}(h)$ et $c_n(e_{-1}h) = c_{n+1}(h)$. On déduit de $(\star)$ que : $r\Big(n+\dfrac{3}{2}\Big)c_{n+1}(f_r) - (1+r^2)nc_n(f_r) + r\Big(n-\dfrac{3}{2}\Big)c_{n-1}(f_r) = 0$.

On déduit de I.D. que, pour tout $n \geqslant 0$,

$r(2n+3)a_{n+1}(f_r) - (1+r^2)2na_n(f_r) + r(2n-3)a_{n-1}(f_r) = 0$.

La suite $(a_n(f_r))_{n\geqslant 0}$ appartient à $\mathcal{S}_r$. Comme $a_n(f_r) \underset{n\to\infty}{=} o(r^n)$ avec $r \in]0,1[$, le rayon de convergence de $\sum a_n(f_r)z^n$ est au moins égal à 1 ce qui assure l'appartenance de $(a_n(f_r))_{n\geqslant 0}$ à $\mathcal{B}_r$.

III.B. Comme, pour tout $n \geqslant 1, a_{n-1} = \dfrac{1+r^2}{r}\dfrac{2n}{2n-3}a_n - \dfrac{2n+3}{2n-3}a_{n+1}$

on a $\begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix} = T_n \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix}$ où $T_n = \begin{pmatrix} \dfrac{1+r^2}{r}\dfrac{2n}{2n-3} & -\dfrac{2n+3}{2n-3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Compte tenu des hypothèses sur les suites (A_n) et (B_n), on vérifie que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $M_n = M_{n-1}T_n$. Donc

$M_{n-1}\begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix} = M_{n-1}T_n\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = M_n\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix}$ *i.e.* le produit matriciel $M_n\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix}$ est indépendant de n il vaut $M_1\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$.

Comme $M_1 = \begin{pmatrix} -\dfrac{2}{r}(1+r^2) & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $a_2 = \dfrac{2(1+r^2)}{5r}a_1 + \dfrac{1}{5}a_0$,

pour tout $n \geqslant 1, M_n\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}$.

III.C. On a donc $\forall n > N, v_n \leqslant v_{n-1} + \varepsilon_n k^{-n}$ où $v_n = |u_n - \ell|k^{-n}$.