Chapitre 2

Rappels sur les suites et fonctions numériques

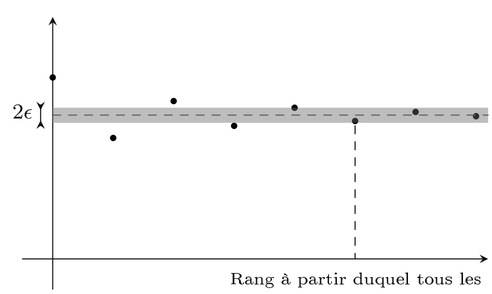
2.1 Généralités sur les suites

2.1.1 Limite d'une suite

Définition 1. ***Limite d'une suite***
Soit (u_n) une suite de réels et soit $l \in \mathbb{R}$. On dit que (u_n) converge vers l si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \text{ tel que, } \forall n > N, |u_n - l| < \epsilon.$$

Remarque 1
On peut traduire cette définition, en disant qu'une suite converge vers l, si quel que soit l'intervalle ouvert centré autour de l, il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont dans cet intervalle.



Nous allons utiliser cette définition pour démontrer un des résultats qui suit.

Auparavant nous aurons besoin de rappeler la propriété de densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

Propriété 1. $\mathbb{Q}$ ***est dense dans*** $\mathbb{R}$

$$\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2, \text{ avec } x < y, \; \exists r \in \mathbb{Q}, \text{ tel que } x < r < y.$$

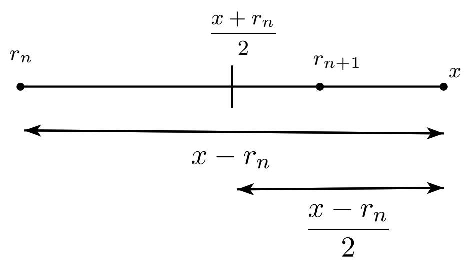
Remarque 2
Cette propriété, combinée à la définition de la limite d'une suite, va pouvoir s'exprimer de manière séquentielle.

Propriété 2.
Pour tout nombre réel x, il existe une suite (r_n) de nombres rationnels qui converge vers x.

Preuve.
Si x est rationnel, la suite constante dont tous les termes sont égaux à x convient.
Si x est irrationnel, alors, par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe un nombre rationnel r_0 tel que : $x - 1 < r_0 < x$.
On construit ensuite la suite (r_n) par récurrence.
On suppose avoir construit pour $n \in \mathbb{N}$ les nombres r_n tels que :
$r_n \in \mathbb{Q}$ et $0 < x - r_n < \dfrac{1}{2^n}$
Par densité, il existe alors un nombre rationnel r_{n+1} tel que :

$$\frac{x + r_n}{2} < r_{n+1} < x.$$

Montrons alors que : $0 < x - r_{n+1} < \dfrac{1}{2^{n+1}}$.
On a $r_{n+1} < x$ donc $x - r_{n+1} > 0$.
Par ailleurs, puisque : $\dfrac{x + r_n}{2} < r_{n+1}$, alors $-r_{n+1} < -\dfrac{x + r_n}{2}$.
Ainsi :
$x - r_{n+1} < x - \dfrac{x + r_n}{2} \leq \dfrac{x - r_n}{2} \leq \dfrac{1}{2}(x - r_n)$
Et donc d'après l'hypothèse de récurrence : $x - r_{n+1} < \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2^n} = \dfrac{1}{2^{n+1}}$



Ainsi entre deux termes successifs de la suite (r_n), la distance par rapport à x est au moins divisée par deux.
Si on choisit un réel ϵ strictement positif, on pourra donc trouver un rang à partir duquel tous les termes de la suite (r_n) seront à une distance de x inférieure à ϵ.
Nous avons bien trouvé une suite de rationnels convergeant vers le réel x.

Définition 2. ***Suite divergeant vers*** $+\infty$
Soit (u_n) une suite de réels. On dit que (u_n) diverge vers $+\infty$ si :

$$\forall M > 0, \exists N > 0, \text{ tel que, } \forall n > N, u_n > M.$$

Remarque 3
Ce que l'on peut traduire, par : quel que soit le réel M strictement positif, il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite seront plus grand que M.

2.1.2 Suite bornée

Définition 3. ***Suite bornée***
Soit (u_n) une suite de réels. On dit que (u_n) est bornée si :

$$\exists M > 0, \text{ tel que, } \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| < M.$$

Remarque 4
A ne pas confondre avec : $\forall n \in \mathbb{N}, \exists M > 0, |u_n| < M$, qui est une proposition qui elle est toujours vraie.

2.1.3 Sens de variation

Définition 4. ***Sens de variation***
Soit (u_n) une suite de réels. On dit que :
- ▷ (u_n) est croissante si : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n \geq 0$.
- ▷ (u_n) est décroissante si : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n \leq 0$.

Remarque 5
Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$, alors on peut étudier si le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est supérieur ou inférieur à 1.

Propriété 3. ***Suite convergente***
Toute suite convergente est bornée.

Propriété 4. ***Suite croissante majorée***
Soit (u_n) une suite croissante et majorée par un réel M.
Alors, (u_n) est convergente.

Remarque 6
- ▷ On a un résultat équivalent pour une suite décroissante minorée.
- ▷ La réciproque de cette propriété est fausse. En effet, une suite convergente n'est pas nécessairement monotone.

2.1.4 Suites adjacentes

Définition 5. ***Suites adjacentes***
On appelle suites adjacentes deux suites (a_n) et (b_n) telles que :

1. (a_n) est croissante,
2. (b_n) est décroissante,
3. $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n - a_n = 0$.

Propriété 5.
Soient (a_n) et (b_n) deux suites adjacentes.
Alors ces deux suites admettent la même limite.

Exemple 1
On cherche à approcher $\sqrt{a}$ à la manière des babyloniens (début du deuxième millénaire avant J.C).
On définit deux suites (a_n) et (b_n) par :
- ▷ $a_0 = \mathrm{E}(\sqrt{a})$ (partie entière de $\sqrt{a}$, notée également $\lfloor \sqrt{a} \rfloor$), $b_0 \in]\sqrt{a}; +\infty[$,
- ▷ $a_n = \dfrac{a}{b_n}$,
- ▷ $b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$.

Nous allons montrer que (a_n) et (b_n) sont adjacentes et convergent vers $\sqrt{a}$.

Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leq \sqrt{a} \leq b_n$.
La propriété est vraie pour $n = 0$, par construction de a_0 et b_0.
Par ailleurs :

$$\begin{aligned} b_{n+1} \geq \sqrt{a} &\iff a_n + b_n \geq 2\sqrt{a} \\ &\iff \frac{a}{b_n} + b_n \geq 2\sqrt{a} \\ &\iff a - 2b_n\sqrt{a} + b_n^2 \geq 0 \\ &\iff (\sqrt{a} - b_n)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Cette dernière proposition étant toujours vraie, nous avons bien que :
$b_{n+1} \geq \sqrt{a}$.
De plus, $a_{n+1} = \dfrac{a}{b_{n+1}} \leq \dfrac{a}{\sqrt{a}} = \sqrt{a}$. L'encadrement est donc vérifié.

Montrons maintenant que : (a_n) **est croissante et** (b_n) **est décroissante.**

$b_{n+1} - b_n = \dfrac{a_n + b_n}{2} - b_n = \dfrac{a_n - b_n}{2} \leq 0$, car d'après l'encadrement montré précédemment, a_n est inférieur à b_n.
La suite (b_n) est donc décroissante.

$a_{n+1} - a_n = \dfrac{a}{b_{n+1}} - \dfrac{a}{b_n} \geq 0$, en utilisant le sens de variation de la suite (b_n).

Ainsi la suite (a_n) est croissante majorée par $\sqrt{a}$, elle converge donc vers un réel α.
La suite (b_n) est décroissante minorée par $\sqrt{a}$, et converge donc vers un réel β.
On passe à la limite dans les relations définissant ces suites, et on obtient :

$$\alpha = \frac{a}{\beta} \text{ et } \beta = \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Ce qui donne :

$$\begin{array}{rrcll} & \beta & = & \dfrac{\alpha+\beta}{2} & \\ \iff & 2\beta & = & \alpha + \beta & \\ \iff & 2\beta & = & \dfrac{a}{\beta} + \beta & \\ \iff & 2\beta^2 & = & a + \beta^2 & \\ \iff & \beta & = & \sqrt{a} & \text{car } \beta \text{ est un nombre positif} \end{array}$$

Ainsi, $\alpha = \dfrac{a}{\beta} = \dfrac{a}{\sqrt{a}} = \sqrt{a}$.

Appliquons cette méthode pour approcher $\sqrt{2}$, en choisissant : $a = 2$, $a_0 = 1$ et $b_0 = 2$.

n	a_n	b_n
0	1	2
1	$1,333333333$	1.500000000
2	$1,411764706$	$1,416666667$
3	$1,414211438$	$1,414215686$
4	$1,414213562$	$1,414213562$

On obtient donc une bonne approximation de $\sqrt{2}$ (à 10^{-9}), à l'aide de seulement douze opérations décomposées en quatre additions, quatre divisions et quatre divisions par deux.

2.2 Suites classiques, comparaison

2.2.1 Suites arithmétiques

Définition 6. ***Suite arithmétique***
Une suite arithmétique (u_n) est donnée par son premier terme u_0, sa raison r et est telle que pour tout entier n :

$$u_{n+1} = u_n + r.$$

Propriété 6.
Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r. On a alors que :

- ▷ $\forall m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq m, u_n = u_m + (n-m)r$,
- ▷ $\forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle\sum_{i=0}^{n} u_i = \frac{(n+1)(u_0+u_n)}{2}$.

2.2.2 Suites géométriques

Définition 7. ***Suite géométrique***
Une suite géométrique (u_n) est donnée par son premier terme u_0, sa raison q et est telle que pour tout entier n :

$$u_{n+1} = qu_n.$$

Propriété 7.
Soit (u_n) une suite géométrique de raison q. On a alors que :
- ▷ $\forall m \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq m$, $u_n = q^{n-m}u_m$,
- ▷ Si $q \neq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} u_i = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

2.2.3 Suites arithmético-géométriques

Définition 8. ***Suite arithmético-géométrique***
Soient q et r deux réels, (u_n) est une suite arithmético-géométrique si pour tout entier n :

$$u_{n+1} = qu_n + r.$$

Remarque 7

Il suffit alors de travailler avec la suite intermédiaire $v_n = u_n + \dfrac{r}{q-1}$, pour obtenir l'expression de u_n en fonction de n.

En effet, avec $v_n = u_n + \dfrac{r}{q-1}$ et $u_{n+1} = qu_n + r$, on obtient pour tout entier n :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} + \frac{r}{q-1} = qu_n + r + \frac{r}{q-1} = q\left(u_n + \frac{r}{q} + \frac{r}{q(q-1)}\right) \\ &= q\left(u_n + \frac{r(q-1)+r}{q(q-1)}\right) = q\left(u_n + \frac{r}{q-1}\right) = qv_n \end{aligned}$$

Ce qui nous donne, pour tout entier n :

$$\begin{aligned} & v_n &= v_0 q^n \\ \iff & u_n + \frac{r}{q-1} &= \left(u_0 + \frac{r}{q-1}\right) q^n \\ \iff & u_n &= \left(u_0 + \frac{r}{q-1}\right) q^n + \frac{r}{q-1}. \end{aligned}$$

2.2.4 Suites homographiques

2.2.5 Définition

Définition 9. ***Suite homographique***
Soient a, b, c et d des réels, $c \neq 0$, (u_n) est une suite homographique si :

$$u_0 \in \mathbb{R}, \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \; u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d}.$$

On pose $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$.

- ▷ Si l'équation $f(x) = x$ possède deux solutions α et β, alors la suite (v_n) définie par : $v_n = \dfrac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}$ est géométrique. On peut donc exprimer u_n en fonction de n.
- ▷ Si l'équation $f(x) = x$ possède une unique solution α, alors la suite (v_n) définie par : $v_n = \dfrac{1}{u_n - \alpha}$ est arithmétique.

2.2.6 Comparaison

Définition 10. ***Comparaison***
On considère deux suites (x_n) et (y_n) telles que (y_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang.

- ▷ (x_n) est dite **négligeable** devant (y_n), si x_n/y_n tend vers 0.
  On note $x_n = o(y_n)$.
- ▷ (x_n) et (y_n) sont **équivalentes** si x_n/y_n tend vers 1.
  On note $x_n \sim y_n$.
- ▷ (x_n) est dite **dominée** par (y_n), si x_n/y_n est bornée.
  On note $x_n = O(y_n)$.

Remarque 8
Dans le cas où y_n s'annule, la relation de domination se définit par une inégalité ($\exists C > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \leq N$, $|x_n| \leq C|y_n|$), et la relation d'équivalence par : $x_n - y_n = o(y_n)$.

2.2.7 Suites de référence

- ▷ **Suite divergeant vers** $+\infty$
  Pour $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $k > 1$, on note ci-dessous les suites par ordre de dominance. Une suite est négligeable devant les suites situées à sa