

CHAPITRE I Le solide en Mécanique

I DEFINITIONS - PROPRIETES

I.1 Corps solide

Un solide est défini en Mécanique comme un ensemble de points matériels continu et non mobile. Cela signifie d'une part que la structure de la matière à l'échelle microscopique n'est pas prise en compte et d'autre part que le solide est supposé posséder une forme propre qu'il garde au cours du temps, ce qui le distingue d'un fluide.

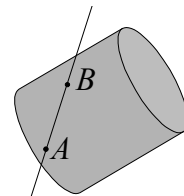
En réalité, un solide est toujours déformable, même si ce peut être très faiblement voire de manière non décelable à l'échelle macroscopique. On dit qu'il possède une certaine plasticité. Elle peut être réversible, comme dans le cas d'un élastique ou d'un ressort dans son domaine linéaire, ou non réversible, comme dans le cas d'une tige de métal tordue. C'est la raison pour laquelle on précise souvent dans les énoncés de problèmes que la masse d'un ressort est considérée nulle : on évite ainsi de trop compliquer l'étude ultérieure, car le ressort disparaît ainsi en tant qu'objet physique et n'est plus représenté que par l'expression analytique d'une force de rappel linéaire.

Notons que beaucoup de « solides » n'en sont pas vraiment au sens de notre définition. Par exemple, un verre de vitrage est un matériau dit amorphe, c'est-à-dire sans structure cristalline à grande échelle, plutôt assimilable à un fluide de viscosité exceptionnellement grande. Il s'écoule très lentement dans le champ de pesanteur vers le bas du cadre de la vitre, comme on peut le voir sur d'anciens vitrages ou vitraux, en observant la déformation d'une image par transparence. Il est en de même des gels, des corps gras ou de certaines balles de silicone qui s'écoulent lentement sur leur support dans le champ de pesanteur. Cette distinction parfois délicate entre un solide et un fluide est discutée non pas par la Mécanique du Solide, mais par une branche spécifique de la Physique : la Rhéologie des fluides non newtoniens. Elle permet d'identifier :

- des fluides rhéo-épaississants, dont la viscosité augmente avec la contrainte exercée ou le temps, comme les solutions concentrées de polymères, la pâte à pain, les fluides de freinage pour amortisseurs, et qui finissent par devenir solides ;
- des fluides rhéo-fluidifiants, dont la viscosité diminue avec la contrainte ou le temps, comme pour la pâte dentifrice, les gels alimentaires, les peintures ou les boues de puits de forage, et qui finissent par devenir liquides.

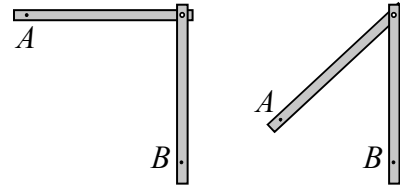
I.2 Solide parfait

Pour éviter ces situations ambiguës et mécaniquement ingérables, on a introduit le modèle du solide parfait. Il s'agit d'un solide rigoureusement indéformable quelle que soit la situation. Mathématiquement, si on considère deux points matériels quelconques A et B de ce solide, alors la distance AB reste constante au cours du temps, indépendamment du mouvement du solide.



Ce sont les solides cristallins (les véritables solides du point de vue thermodynamique) qui se rapprochent le plus du modèle du solide parfait. Mais on s'intéresse peu à la structure microscopique du système en Mécanique. C'est l'aspect macroscopique, forme, répartition des masses, dimension, qui est en première instance le critère de reconnaissance d'un solide. Seules les interactions de contact entre solides peuvent nécessiter une analyse de la matière à une échelle plus petite, afin notamment de modéliser les déformations se produisant au niveau des surfaces de contact.

Nous utilisons systématiquement le modèle du solide parfait, sauf mention contraire. Précisons toutefois qu'un système complexe, comme un ensemble de deux tiges unies par une liaison rotule, pourrait être considéré comme un solide non parfait. Au cours du mouvement, la distance entre deux points appartenant chacun à une tige n'est effectivement pas constante. Nous convenons donc d'appeler ensemble de solides parfaits un tel système et solide parfait chacune de ses parties rigoureusement indéformables.

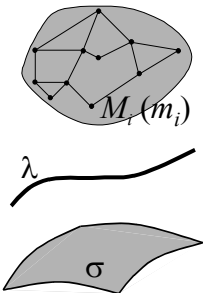


Bien entendu, le solide parfait est un système fermé. Il n'échange pas de matière avec son environnement.

I.3 Répartition de matière

Selon les circonstances, un corps solide pourra être décrit par :

- un ensemble de points matériels M_i , de masses individuelles m_i , rigidement liés de manière à assurer $M_i M_j = \text{cte}$,
- une distribution linéique de matière, de densité linéique de masse continue $\lambda(M)$,
- une distribution surfacique de matière, de densité surfacique de masse continue $\sigma(M)$,
- une distribution volumique de matière, de masse volumique continue $\mu(M)$.



Ces différents modèles pourront être associés dans des systèmes complexes.

Nous rencontrerons le plus souvent des modèles de répartition uniforme de matière. On considérera par exemple une répartition surfacique uniforme, la densité de masse σ sera supposée ne pas dépendre de la position du point M sur la surface. Cela facilite bien sûr les calculs et se justifie dans le cas du corps pur cristallin : sa composition chimique et sa structure géométrique microscopique sont uniformes.

I.4 Forces

Il convient de distinguer selon leur nature les différentes forces pouvant s'exercer sur un solide.

I.4.1 Forces intérieures de cohésion

Dans un solide, les interactions entre les particules matérielles assurent sa cohésion et constituent des forces intérieures. Elles sont essentiellement de nature électrostatique, bien que la présentation quantique se révèle parfois indispensable. Ce sont les liaisons covalentes, ioniques ou de van der Waals selon le cas. Elles n'interviennent jamais dans l'écriture du principe fondamental de la dynamique.

1.4.2 Forces à distance

Les forces à distance résultent de l'addition des interactions fondamentales, force de gravitation, force électromagnétique de Lorentz, sur l'ensemble des particules constituant le solide et le milieu. Dans un référentiel non galiléen, il faut également prendre en compte les forces d'inertie qui se comportent formellement comme des forces à distance.

Ces forces sont de plus pour la plupart conservatives et s'expriment alors comme des gradients \perp . Mais, que ce soit ou non le cas, elles constituent des champs de forces continus et leur intensité est proportionnelle à la quantité de matière du système sur lequel elles agissent.

1.4.3 Forces de contact

Ce sont les forces dont les points d'application sont localisés au niveau de la surface de contact ou du point de contact entre deux solides. On les appelle habituellement réactions. Elles résultent de l'addition des forces de répulsion électrostatique entre les nuages électroniques des deux solides. La composante normale au plan tangent au lieu de contact est toujours répulsive et traduit l'impénétrabilité des solides. La composante tangentielle s'oppose au mouvement relatif et fait partie des forces dissipatives.

2 GRANDEURS MECANIQUES

On retrouve les grandeurs physiques de la Mécanique du point. Mais leur définition doit être adaptée aux différentes distributions de matière que nous utiliserons, le passage d'un ensemble de points matériels à une répartition continue nécessitant le remplacement de sommes discrètes par des intégrales.

2.1 Grandeurs cinématiques

On retrouve d'abord les vecteurs position, vitesse et accélération. Pour un système de points matériels M_k , on reprend les définitions données en première année. Dans un référentiel \mathcal{R} donné, muni d'une origine O :

- $\vec{r}_k = \overrightarrow{OM_k}$ est le vecteur position,

- $\vec{v}_k = \dot{\vec{r}}_k = \frac{d^{\mathcal{R}} \overrightarrow{OM_k}}{dt}$ est le vecteur vitesse,

- $\vec{a}_k = \dot{\vec{v}}_k = \frac{d^{\mathcal{R}} \vec{v}_k}{dt} = \frac{d^2 \overrightarrow{OM_k}}{dt^2}$ est le vecteur accélération.

Pour une distribution continue de matière, linéique, surfacique ou volumique, ces trois grandeurs deviennent des champs de vecteurs :

- $\vec{r}_M = \overrightarrow{OM}$ est le vecteur position,

\perp A l'exception de la force magnétique $q\vec{v} \wedge \vec{B}$, de la force d'inertie de Coriolis $-2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}$ et

du terme $-m \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM}$ de la force d'inertie d'entraînement.

- $\vec{v}_M = \frac{d^{\mathcal{R}} \overline{OM}}{dt}$ est le champ de vitesse,
- $\vec{a}_M = \frac{d^2 \overline{OM}}{dt^2}$ est le champ d'accélération.

2.2 Grandeurs cinétiques

On reprend encore pour un système de n points matériels M_k , de masses individuelles m_k , les définitions de première année. Dans le référentiel \mathcal{R} muni d'un repère d'origine O :

- le point G , univoquement défini par $\sum_{k=1}^n m_k \overline{PM}_k = \left(\sum_{k=1}^n m_k \right) \overline{PG}$ quel que soit le choix du point géométrique P , est le centre d'inertie du système,
- $\vec{p} = \sum_{k=1}^n m_k \vec{v}_k = \left(\sum_{k=1}^n m_k \right) \vec{v}_G$ est la quantité de mouvement, ou impulsion mécanique, du système,
- $\vec{\mathcal{L}}_A = \sum_{k=1}^n \overline{AM}_k \wedge m_k \vec{v}_k$ est le moment cinétique en A du système,
- $\mathcal{E}_c = \sum_{k=1}^n \frac{m_k v_k^2}{2}$ est l'énergie cinétique du système.

Pour une distribution continue de matière \mathcal{D} on définit de manière identique :

- le centre d'inertie G tel que $\int_{\mathcal{D}} \overline{PM} dm = \left(\int_{\mathcal{D}} dm \right) \overline{PG}$,
- la quantité de mouvement $\vec{p} = \int_{\mathcal{D}} \vec{v}_M dm = \left(\int_{\mathcal{D}} dm \right) \vec{v}_G$,
- le moment cinétique en A $\vec{\mathcal{L}}_A = \int_{\mathcal{D}} \overline{AM} \wedge \vec{v}_M dm$,
- l'énergie cinétique $\mathcal{E}_c = \int_{\mathcal{D}} \frac{v_M^2}{2} dm$.

Selon le cas, dm s'écrit :

- $\lambda(M) dl$ pour une distribution linéique,
- $\sigma(M) dS$ pour une distribution surfacique,
- $\mu(M) dV$ pour une distribution volumique.

Rappelons que le centre d'inertie d'un système peut ne coïncider avec aucun de ses points physiques, c'est par exemple le cas d'une sphère creuse, et qu'il découle de sa définition qu'il se trouve toujours plus près du domaine où se trouve la plus grande quantité de matière.

Plus généralement, le fait de passer à une répartition continue de matière ne remet en question aucun des résultats obtenus avec un système de points matériels (Cf. chapitre

7 du cours de Mécanique de première année). Il suffit de remplacer dans toutes les définitions et démonstrations des sommes discrètes \sum par des sommes continues \int . En particulier, les deux théorèmes de Kœnig seront non seulement valables mais utilisés de manière systématique.

3 LE PROBLEME GENERAL

Il existe deux types de problèmes en Mécanique du solide, les problèmes de statique et ceux de dynamique. Dans les deux cas, les étapes du raisonnement sont les mêmes et elles sont en fait systématiques.

On commence par définir le système, qui peut être une partie d'un solide, un solide entier ou un ensemble de solides. On choisit ensuite le référentiel et le système de coordonnées les plus adaptés (permettant les calculs les plus simples) à la géométrie du système.

Puis on fait le bilan des forces, celles d'inertie incluses si le référentiel n'est pas galiléen, en distinguant les forces extérieures au système, la distinction dépendant fortement de la définition de celui-ci, les forces qui sont conservatives, celles qui ne travaillent pas et on identifie les inconnues, desquelles font toujours partie les actions de contact.

On choisit enfin la ou les équations à utiliser pour déterminer celles-ci, en privilégiant la méthode qui semble la plus rapide.

- **Statique**

Le cas de la statique correspond à une analyse intermédiaire entre ce qui a été vu en Mécanique du Point et les nouvelles formulations spécifiques au solide. Celui-ci étant immobile, tous ses points ont la même vitesse nulle. Seuls les points de contact de ce solide avec son environnement et son centre d'inertie sont des points particuliers. On utilise le fait que la somme des forces extérieures est nulle et, si cela ne suffit pas, on annule la nullité de la somme des moments en un point de ces forces. Mais il peut arriver que le nombre d'inconnues soit plus élevé que le nombre d'équations ainsi obtenues. On pourra alors essayer de décomposer le système en éléments plus petits dont on écrira également les conditions d'équilibre. Cela ne suffira pas toujours et il existe des problèmes de statique qui n'ont pas de solution, alors qu'ils sont a priori plus simples que les problèmes de dynamique.

- **Dynamique**

C'est cette fois l'évolution temporelle du système que l'on recherche. Le théorème de l'énergie mécanique constitue l'équation « clé » pour les systèmes conservatifs à un seul degré de liberté quand on ne cherche pas l'expression des forces de contact. Nous l'utiliserons de manière préférentielle du fait de la signification profonde de cette équation². Mais les solides possèdent en général six degrés de liberté, c'est-à-dire que la description de leur mouvement nécessite la connaissance de six variables spatiales³. Quand on ne se trouve pas dans le cas favorable précédent, on n'a pas d'autre choix

² C'est l'équation « transversale » par excellence, celle qui unifie toutes les disciplines de la Physique.

³ Pour un corps formé de n points matériels, il existe a priori $3n$ degrés de liberté car il faut connaître les trois coordonnées spatiales de chaque point. Mais l'existence des liaisons dans un solide permet d'abaisser ce nombre à six, quelle que soit la valeur de n pourvu qu'il soit supérieur ou égal à 3.

que d'utiliser le principe fondamental, et ce toujours sous sa forme complète, c'est-à-dire théorème du centre d'inertie ET théorème du moment cinétique. Dans les cas où il y a contact entre solides, les hypothèses sur celui-ci (contact avec ou sans glissement, contact avec ou sans frottement) sont déterminantes. Si on ne les prend pas en compte, quand il y a bien contact entre au moins deux solides, il est impossible de trouver la solution du problème posé.

CHAPITRE 2 Cinématique et cinétique

du solide parfait

I MOUVEMENT D'UN SOLIDE

En cinématique, on étudie seulement les mouvements des systèmes, sans se préoccuper de leurs causes. Pour un système quelconque de n points matériels, cette étude peut être très compliquée si l'existence de liaisons ne réduit pas considérablement le nombre de degrés de libertés, c'est-à-dire le nombre de coordonnées indépendantes. Dans le cas du solide parfait, l'indéformabilité rigoureuse réduit à six le nombre de degrés de liberté, ce qui permet de décrire le mouvement de n'importe lequel de ses points par la donnée de seulement deux grandeurs vectorielles globales : les vecteurs vitesse du centre d'inertie $\vec{v}_G(t)$ et rotation du solide $\vec{\omega}(t)$.

I.1 Champ de vitesse dans un solide – vecteur rotation

Dans le référentiel d'étude d'origine O , la distance entre deux points quelconques A et B d'un solide est par définition constante. Ceci nous permet d'écrire :

$$AB^2 = \text{cte}, \text{ soit :}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{AB^2}{2} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\overline{AB} \cdot \overline{AB}}{2} \right) = \overline{AB} \cdot \frac{d\overline{AB}}{dt} = 0.$$

Ayant par ailleurs :

$$\frac{d\overline{AB}}{dt} = \frac{d}{dt} (\overline{OB} - \overline{OA}) = \vec{v}_B - \vec{v}_A$$

on en déduit :

$$\overline{AB} \cdot (\vec{v}_B - \vec{v}_A) = 0.$$

On constate que le vecteur $\vec{v}_B - \vec{v}_A$ est orthogonal à \overline{AB} et il existe par conséquent un vecteur $\vec{\omega}$ tel que $\vec{v}_B - \vec{v}_A = \vec{\omega} \wedge \overline{AB}$. Il dépend a priori des points A et B . Or les seuls vecteurs que l'on peut construire avec ces deux points sont de la forme $f(AB)\overline{AB}$. On doit donc avoir, si $\vec{\omega}$ dépend bien des points A et B :

$$\vec{v}_B - \vec{v}_A = f(AB)\overline{AB} \wedge \overline{AB} = \vec{0}.$$

Mais c'est absurde car tous les points d'un solide n'ont pas systématiquement le même vecteur vitesse. Le mouvement de rotation autour d'un axe fixe est un contre-exemple suffisant. L'hypothèse selon laquelle $\vec{\omega}$ dépend des points A et B est donc fautive, ce qui signifie que $\vec{\omega}$ est un vecteur uniforme pour l'ensemble du solide et il ne dépend en fait que du temps, éventuellement. On l'appelle vecteur rotation du solide.

On retiendra donc la formule générale entre les vitesses de deux de ses points, appelée formule, ou théorème, de Varignon ¹ :

$$\vec{v}_B(t) = \vec{v}_A(t) + \overline{BA}(t) \wedge \vec{\omega}(t).$$

Si la vitesse de A et le vecteur $\vec{\omega}$ sont connus, elle permet de connaître complètement le champ de vitesse dans le solide.

I.2 Vitesse du centre d'inertie

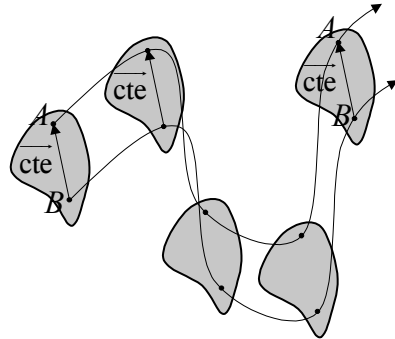
Le centre d'inertie d'un solide n'étant pas forcément un de ses points matériels (c'est le cas par exemple d'un cerceau, d'une sphère creuse ou d'un fer à cheval), il n'est pas certain que sa vitesse vérifie la formule de Varignon. Pour le vérifier, on part de la définition du centre d'inertie et on utilise un point A du solide. On fait le calcul avec une distribution continue (D) de matière, mais il se mène exactement de la même manière avec un ensemble de point matériels et la conclusion est donc identique :

$$\begin{aligned} \vec{v}_G &= \frac{\int_{(D)} \vec{v}_M dm}{\int_{(D)} dm} = \frac{\int_{(D)} (\vec{v}_A + \overline{MA} \wedge \vec{\omega}) dm}{\int_{(D)} dm} = \vec{v}_A + \frac{\int_{(D)} \overline{MA} \wedge \vec{\omega} dm}{\int_{(D)} dm} \\ &= \vec{v}_A + \left(\frac{\int_{(D)} \overline{MA} dm}{\int_{(D)} dm} \right) \wedge \vec{\omega} = \vec{v}_A + \overline{GA} \wedge \vec{\omega}. \end{aligned}$$

La formule est vérifiée et on pourra donc l'appliquer au centre d'inertie sans se préoccuper de sa position relativement aux limites du solide.

I.3 Mouvement de translation

Dans le cas particulier où le vecteur rotation est nul à tout instant, tous les points du solide ont même vitesse instantanée $\vec{v}(t)$, qui est aussi celle du centre d'inertie. D'après le théorème de Varignon on obtient par intégration $\overline{OA} = \overline{OB} + \text{cte}$, ce qui signifie que toutes les trajectoires sont identiques à une translation près. On dit que le solide est en translation. Son attitude initiale et la connaissance de $\vec{v}(t)$ déterminent alors entièrement le mouvement de tout point du solide.



I.4 Mouvement de rotation – angles d'Euler

On peut toujours définir un référentiel \mathcal{R}_C en translation par rapport à celui d'étude et dans lequel un point du solide reste au repos. Ce peut être par exemple le référentiel \mathcal{R}^* du centre d'inertie, auquel cas c'est G qui est au repos, mais ce n'est pas une

¹ du nom d'un mathématicien français du XVII^{ème} siècle.