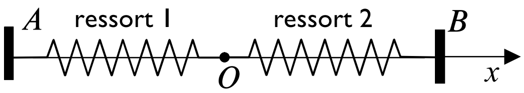
PROBLEMES DE SYNTHESE

Problème 1 : A propos d'oscillations (d'après CCP 2003)

A OSCILLATEUR MECANIQUE



Considérons un mobile, supposé ponctuel, de masse m, astreint à glisser le long d'une tige horizontale de direction Ox. Ce mobile est maintenu par deux ressorts à réponse linéaire dont les extrémités sont fixées en deux points A et B. Les deux ressorts sont identiques, ont même constante de raideur k et même longueur au repos l_0. Dans la position d'équilibre du système, les longueurs des ressorts sont identiques et valent $l_{éq}$.

Soit O le point où se trouve le mobile lorsqu'il est à l'équilibre. Il constitue l'origine de l'axe des x. Dans un premier temps, on néglige tout frottement.

1 **L'étude est menée dans le référentiel terrestre, considéré comme galiléen. A $t = 0$, le mobile est abandonné sans vitesse initiale d'une position x_0 (avec $x_0 \neq 0$).**

a **Faire le bilan des forces appliquées au mobile lorsqu'il se trouve à un point d'abscisse x quelconque. Etablir l'équation différentielle dont $x(t)$ est solution.**

b **Montrer que le système constitue un oscillateur harmonique dont on précisera la pulsation et la période T_0 en fonction de k et m. On posera $\omega_0^2 = \dfrac{2k}{m}$.**

c **Donner l'expression de $x(t)$ en tenant compte des conditions initiales.**

2 **Donner les expressions de l'énergie potentielle élastique $\mathcal{E}_p(t)$ des deux ressorts, de l'énergie cinétique $\mathcal{E}_c(t)$ du mobile et de l'énergie mécanique totale $\mathcal{E}(t)$ du système en fonction de k, x_0, ω_0 et t et éventuellement l_0 et $l_{éq}$. Par convention, l'origine de l'énergie potentielle élastique correspondra à la position d'équilibre ; on aura ainsi $\mathcal{E}_p = 0$ pour $x = 0$. Commenter les résultats précédents et particulièrement l'expression de $\mathcal{E}(t)$.**

La question qui suit prend en compte l'existence de frottements lors du déplacement du mobile sur son support.

3 **En fait, il existe entre le mobile et la tige horizontale un frottement de type visqueux. La force de frottement est de la forme $\vec{f} = -\mu\vec{v}$ où μ est une constante positive et $\vec{v}$ le vecteur vitesse du mobile. Les conditions initiales sont les mêmes que pour les questions précédentes.**

a **Etablir l'équation différentielle dont $x(t)$ est solution. On posera $\omega_0^2 = \dfrac{2k}{m}$ et $h = \dfrac{\mu}{m}$.**

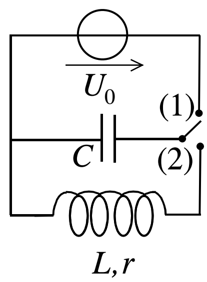
b **Montrer que lorsque $\mu < 2^{3/2}\sqrt{km}$, le mouvement est oscillatoire amorti.**

c **Donner l'expression générale de $x(t)$ dans ce cas, sans chercher à calculer les constantes d'intégration.**

d **Exprimer la pseudo-période associée à ce mouvement en fonction de ω_0 et h.**

e **Quelle est l'énergie dissipée par le frottement pendant la durée totale du mouvement ?**

B OSCILLATEUR ELECTRIQUE



Soit le circuit schématisé ci-contre, constitué d'un condensateur parfait de capacité C, d'une bobine d'inductance L et de résistance r et d'un générateur de tension continue U_0. Le commutateur K est initialement en position (1). Le condensateur est donc chargé sous la tension U_0. A l'instant $t = 0$, le commutateur K est basculé dans la position (2). On note $q(t)$ la charge portée par l'armature de gauche du condensateur et $i(t)$ l'intensité du courant dans le circuit.

1 **Exprimer l'énergie électromagnétique $\mathcal{E}_m$ du circuit en fonction de $q(t)$, $i(t)$, L et C.**

2 **Justifier que $\mathcal{E}_m$ diminue au cours du temps et exprimer sa dérivée $\dfrac{d\mathcal{E}_m}{dt}$ en fonction de r et $i(t)$.**

3 **En déduire l'équation différentielle qui régit la charge $q(t)$ dans le circuit. On pose $\omega_0^2 = \dfrac{1}{LC}$ et $Q_0 = \dfrac{L\omega_0}{r} = \dfrac{1}{rC\omega_0}$, ω_0 étant la pulsation propre du circuit oscillant et Q_0 son facteur de qualité. Donner l'expression de cette équation différentielle en utilisant les grandeurs ω_0 et Q_0.**

4 **Donner la condition sur Q_0 pour que la solution de l'équation différentielle représente des oscillations amorties. Donner l'expression de la pseudo-période T du circuit en fonction de Q_0 et T_0, période propre du circuit égale à $\frac{2\pi}{\omega_0}$, dans le cas d'oscillations amorties. Comparer T à T_0 et commenter.**

C ANALOGIE ELECTROMECANIQUE

1 **Rappeler les équations différentielles établies dans le cas de l'oscillateur mécanique (partie A) et dans le cas de l'oscillateur électrique (partie B). Ces deux équations laissent apparaître une analogie de forme appelée analogie électromécanique.**

2 **Indiquer, sous forme d'un tableau à deux colonnes, les analogues électriques des grandeurs mécaniques suivantes :**

- coefficient de rappel élastique k,
- masse du mobile m,
- coefficient de frottement fluide μ,
- coordonnée de position x,
- énergie,
- puissance dissipée par frottements.

D HAUT-PARLEUR ELECTRODYNAMIQUE

Un haut parleur électrodynamique est constitué :

- d'un aimant permanent annulaire fixe, d'axe horizontal $x'x$ qui crée un champ magnétique $\vec{B}$ radial et de norme uniforme B dans la région utile de l'entrefer,

- d'une bobine mobile indéformable, de même axe $x'x$, comportant N spires circulaires de rayon a, placée dans l'entrefer de l'aimant,

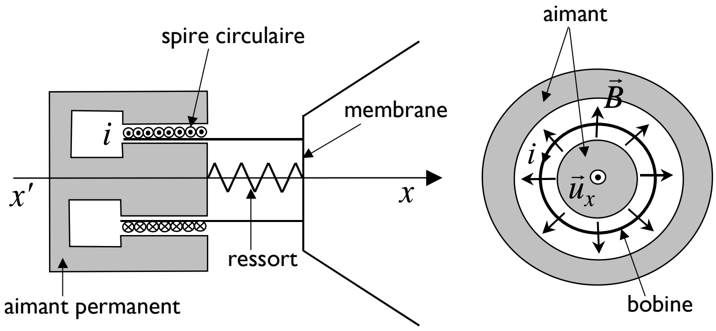
- d'une membrane solidaire de la bobine et pouvant effectuer des déplacements axiaux de faible amplitude.

La membrane est ramenée vers sa position d'équilibre par une force élastique modélisée par un ressort de raideur k, solidaire de l'aimant à une extrémité et solidaire de la membrane à l'autre extrémité.

L'ensemble mobile (membrane + bobine), de masse m et repéré par son abscisse $x(t)$ lorsqu'il est en mouvement, est soumis aux forces suivantes :
- son poids,
- la réaction du support, verticale et opposée au poids,
- la force de rappel du ressort de raideur k,
- la résultante $\vec{f}$ des forces de Laplace exercées par l'aimant sur la bobine lorsqu'elle est parcourue par un courant d'intensité $i(t)$,

- une force de frottement fluide proportionnelle à la vitesse : $\vec{F} = -\mu \dfrac{dx}{dt}\vec{u}_x$.

La position $x = 0$ **correspond à celle de repos du système quand** $i = 0$.



Vue transversale de l'aimant Vue de face de l'aimant

L'étude est menée dans le référentiel terrestre considéré comme galiléen.

1 **Faire un schéma, en respectant les orientations données, où figure la force élémentaire** $\vec{df}$ **s'exerçant sur un petit élément** $i\vec{dl}$ **de courant de la bobine (on supposera sur ce schéma l'intensité** i **positive).**

2 **Expliciter** $\vec{df}$ **en fonction de** i, dl, B **et un vecteur unitaire que l'on précisera. En déduire les caractéristiques de la résultante** $\vec{f}$ **s'exerçant sur l'ensemble de la bobine. On posera** $l = 2\pi Na$.

3 **En appliquant le principe fondamental de la dynamique, en déduire l'équation différentielle liant** $x(t)$ **et ses dérivées à l'intensité** $i(t)$. **Cette équation sera désignée par équation (1).**

4 **Compte tenu de son déplacement dans l'entrefer de l'aimant à la vitesse** $\vec{v} = v\vec{u}_x$, **calculer en détaillant les calculs, la force électromotrice** $e(t)$ **induite par le déplacement de la bobine en fonction de** B, l **et** v.

5 **La bobine, de résistance** R **et d'inductance propre** L, **est connectée à une source idéale qui délivre une tension** $u(t)$. **Montrer que l'équation différentielle vérifiée par** $i(t)$ **s'écrit :**

$$L\frac{di}{dt} + Ri - 2\pi NaBv = u.$$

Cette équation sera désignée par (2).

6 **La source délivre la tension sinusoïdale** $u(t) = U_m \cos(\omega t)$. **On se propose d'étudier le régime sinusoïdal forcé pour une pulsation** ω. **On utilise les images complexes** $\underline{u}$, $\underline{i}$ **et** $\underline{v}$ **de** $u(t)$, $i(t)$ **et** $v(t)$.

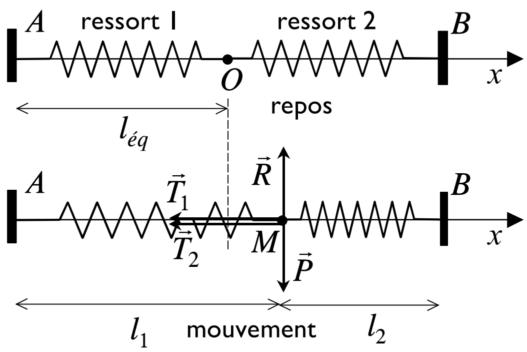
a **A partir de l'équation (1), exprimer** $\underline{v}$ **en fonction de** $\underline{i}$, B, N, a, m, ω, μ **et** k. **A partir de l'équation (2), donner une relation entre** $\underline{u}$, $\underline{i}$, $\underline{v}$, R, N, a, L, ω **et** B.

b **En déduire une relation entre $\underline{u}$ et $\underline{i}$ que l'on mettra sous la forme $\underline{u} = \underline{Z}\,\underline{i}$ où $\underline{Z}$ est une impédance complexe que l'on exprimera en fonction de R, L, B, l, m, μ, k et ω. Montrer que $\underline{Z}$ peut se mettre sous la forme $\underline{Z} = R + jL\omega + \underline{Z}_m$ avec $\underline{Z}_m = \dfrac{1}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{jL_1\omega} + jC_1\omega}$. Donner les expressions de R_1, L_1, C_1 en fonction de B, N, a, m, μ et k.**

c **Réaliser le schéma électrique équivalent à l'impédance d'entrée du haut-parleur.**

CORRECTION

A OSCILLATEUR MECANIQUE



1.a. Dans le référentiel terrestre, les forces agissant sur le mobile M sont le poids $\vec{P}$, les tensions $\vec{T}_1$ et $\vec{T}_2$ exercées par les ressorts ainsi que la réaction $\vec{R}$ de la tige, perpendiculaire à celle-ci du fait de l'absence de frottement. La deuxième loi de Newton s'écrit :

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = m\vec{a}$$

où $\vec{a}$ représente l'accélération de M. La projection de cette équation suivant l'axe Ox conduit à :

$$-k(l_1 - l_0) + k(l_2 - l_0) = m\ddot{x}.$$

Or on a $l_1 = x + l_{éq}$ et $l_2 = l_{éq} - x$, ce qui entraîne :

$$m\ddot{x} = -k(l_1 - l_0 - l_2 + l_0) = -k(2x).$$

On obtient finalement l'équation différentielle :

$$\ddot{x} + \frac{2k}{m}x = 0 = \ddot{x} + \omega_0^2 x.$$

1.b. Le système est équivalent à un mobile soumis à un ressort unique de raideur $k' = 2k$. On reconnaît l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation propre ω_0 et de période :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \pi\sqrt{\frac{2m}{k}}.$$

1.c. La solution de cette équation différentielle est :

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$

où A et B sont des constantes d'intégration.

Les conditions initiales permettent d'écrire :

$$\dot{x}(0) = 0 = -A\omega_0 \sin(0) + B\omega_0 \cos(0) = B\omega_0, \quad \text{soit} \quad B = 0,$$
$$x(0) = A\cos(0) = x_0, \quad \text{soit} \quad A = x_0.$$

La solution recherchée est alors :

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t).$$

2. Le travail du poids est nul, il n'est donc pas besoin d'introduire l'énergie potentielle de pesanteur. L'énergie $\mathcal{E}_p(t)$ est ainsi la somme des énergies potentielles associées à chaque ressort. Elle peut donc s'obtenir en écrivant :

$$d\mathcal{E}_p = -\left(\vec{T}_1 + \vec{T}_2\right)\cdot d\vec{l} = -\left[-k(l_1 - l_0) + k(l_2 - l_0)\right]\vec{u}_x \cdot d\vec{l} = k(l_1 - l_2)dx$$
$$= 2kxdx$$

dont l'intégration donne :

$$\mathcal{E}_p = kx^2 + \text{cte}.$$

Avec la convention imposée par l'énoncé, la constante d'intégration est nulle et on écrit finalement :

$$\mathcal{E}_p(t) = kx_0^2 \cos^2(\omega_0 t).$$

L'énergie cinétique de M a pour expression :

$$\mathcal{E}_c(t) = \frac{m\dot{x}^2}{2} = \frac{mx_0^2\omega_0^2}{2}\sin^2(\omega_0 t)$$

et enfin l'énergie mécanique s'écrit explicitement :

$$\mathcal{E}_m(t) = \mathcal{E}_c(t) + \mathcal{E}_p(t) = \frac{mx_0^2\omega_0^2}{2}\sin^2(\omega_0 t) + kx_0^2\cos^2(\omega_0 t).$$

Avec $\omega_0^2 = \dfrac{2k}{m}$, elle se réduit à :

$$\mathcal{E}_m(t) = kx_0^2.$$

L'énergie mécanique est constante, ce qui signifie que le système étudié est conservatif et ce n'est pas étonnant puisque la seule force non conservative présente, la réaction de l'axe, ne fournit pas de travail (elle est orthogonale au déplacement de M).

3.a. En présence d'un frottement visqueux, représenté par la force $\vec{f} = -\mu\vec{v}$, l'équation différentielle régissant le mouvement devient :

$$\ddot{x} + \frac{\mu}{m}\dot{x} + \frac{2k}{m}x = 0, \quad \text{soit} \quad \ddot{x} + h\dot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

3.b. Le discriminant de l'équation caractéristique $r^2 + hr + \omega_0^2 = 0$ s'écrit :

$$\Delta = h^2 - 4\omega_0^2.$$

Le régime est pseudo-périodique si Δ est négatif, ce qui implique :

$$h < 2\omega_0, \quad \text{soit} \quad \mu < 2^{3/2}\sqrt{km}.$$

3.c. Le discriminant étant négatif, les racines de l'équation caractéristique sont :

$$r_{1,2} = -\frac{h}{2} \pm j\frac{\sqrt{4\omega_0^2 - h^2}}{2} = -\frac{h}{2} \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \frac{h^2}{4}} = -\frac{h}{2} \pm j\Omega$$

avec $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{h^2}{4}}$. Cette grandeur Ω est la pseudo-pulsation. La solution de l'équation différentielle est alors de la forme :

$$x(t) = \exp\left(-\frac{h}{2}t\right)\left[A'\cos(\Omega t) + B'\sin(\Omega t)\right]$$

où A' et B' sont des constantes d'intégration.

3.d. La pseudo-période associée à ce mouvement est donnée par :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \frac{h^2}{4}}}.$$

3.e. Reprenons l'équation différentielle sous la forme $m\ddot{x} + \mu\dot{x} + 2kx = 0$ et multiplions la par $\dot{x}$:

$$m\dot{x}\ddot{x} + \mu\dot{x}^2 + 2k\dot{x}x = 0, \text{ soit :}$$

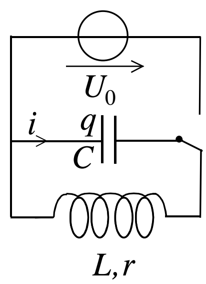
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{x}^2}{2} + kx^2\right) = -\mu\dot{x}^2.$$

On obtient ainsi :

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \vec{f} \cdot \vec{v}$$

et on retrouve le fait que la variation d'énergie mécanique par unité de temps est égale à la puissance des forces non conservatives. Comme la fonction $x(t)$ et sa dérivée $\dot{x}(t)$ tendent, quelles que soient les conditions initiales, vers 0 quant t tend vers l'infini, l'énergie mécanique finale est nulle et l'énergie dissipée (et évacuée sous forme thermique) par la force de frottement est égale à l'énergie mécanique initiale.

<u>B OSCILLATEUR ELECTRIQUE</u>



1. L'énergie électromagnétique présente dans le circuit est la somme des énergies électrostatique stockée dans le condensateur et magnétique emmagasinée dans la bobine :

$$\mathcal{E}_m = \frac{Li^2}{2} + \frac{q^2}{2C} \text{ avec } i = \frac{dq}{dt}.$$

2. L'énergie électromagnétique est dissipée par effet Joule dans la résistance r de la bobine et on a donc :

$$\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = -ri^2.$$

L'énergie diminue au cours du temps.

3. Dérivons l'expression précédente par rapport au temps :

$$\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = Li\frac{di}{dt} + \frac{q}{C}\frac{dq}{dt} = -ri^2 \text{, soit :}$$

$$L\dot{q}\ddot{q} + \frac{q\dot{q}}{C} = -r\dot{q}^2.$$

En simplifiant par $\dot{q}$, qui n'est pas identiquement nul, puis en introduisant les notations $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ et $Q_0 = \frac{L\omega_0}{r} = \frac{1}{rC\omega_0}$ il vient :

$$\ddot{q} + \frac{\omega_0}{Q_0}\dot{q} + \omega_0^2 q = 0.$$

4. On obtient des oscillations amorties, c'est-à-dire un régime pseudo-périodique, si le discriminant $\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q_0^2} - 4\omega_0^2$ de l'équation $x^2 + \frac{\omega_0}{Q_0}x + \omega_0^2 = 0$ est négatif, ce qui impose :

$$\frac{\omega_0}{Q_0} < 2\omega_0 \text{, soit } Q_0 > \frac{1}{2}.$$

Les racines de l'équation sont alors $-\frac{\omega_0}{2Q_0} \pm j\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q_0^2}}$, d'où la solution :

$$q(t) = \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q_0}t\right)\left[A''\cos(\Omega t) + B''\sin(\Omega t)\right],$$

où A'' et B'' sont des constantes d'intégration, avec $\Omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q_0^2}}$, et la pseudo-période a pour expression :

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q_0^2}}} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q_0^2}}}.$$

Puisque $1 - \frac{1}{4Q_0^2} < 1$ elle est supérieure à T_0 et d'autant plus proche de la pulsation propre du circuit que la valeur de Q_0 est grande.

C ANALOGIE ELECTROMAGNETIQUE

1. On a établi les deux équations suivantes :

$$\ddot{x} + \frac{\mu}{m}\dot{x} + \frac{2k}{m}x = 0 \text{ pour l'oscillateur mécanique,}$$

$$\ddot{q} + \frac{r}{L}\dot{q} + \frac{q}{LC} = 0 \text{ pour l'oscillateur électrique.}$$

2. Leur similitude permet d'extraire certaines analogies électromécaniques. Elles sont regroupées dans le tableau de la page suivante.