

# Sommaire

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>Partie I Logique propositionnelle</b>	<b>5</b>
<b>Chapitre 1 Le langage naturel restreint</b>	<b>7</b>
1.1 Propositions élémentaires . . . . .	8
1.2 Les connecteurs de base . . . . .	8
1.2.1 La négation . . . . .	8
1.2.2 La conjonction . . . . .	9
1.2.3 La disjonction . . . . .	9
1.2.4 L'implication . . . . .	10
1.2.5 La double implication . . . . .	12
1.3 Les propositions du langage naturel restreint . . . . .	13
1.3.1 La composition des propositions . . . . .	13
1.3.2 Arbre de décomposition d'une proposition . . . . .	14
1.3.3 Les tables de vérité . . . . .	16
1.4 Propositions équivalentes . . . . .	18
1.4.1 Les équivalences de base . . . . .	19
1.4.2 Tautologies et contradictions . . . . .	23
L'essentiel du chapitre 1 . . . . .	27
<b>Chapitre 2 Le langage propositionnel</b>	<b>29</b>
2.1 Les formules du langage propositionnel . . . . .	29
2.2 Formules équivalentes, tautologies et contradictions . . . . .	31
2.3 Le cas des langages finis . . . . .	32
2.3.1 Formules complètes . . . . .	33
2.3.2 Formes normales disjonctives . . . . .	33
2.3.3 Nombre de formules non équivalentes d'un langage fini	38
L'essentiel du chapitre 2 . . . . .	39

<b>Chapitre 3</b>	<b>Théorèmes, preuves et démonstrations</b>	<b>41</b>
3.1	Les démonstrations axiomatiques . . . . .	41
3.1.1	La notion d'axiome . . . . .	41
3.1.2	Les règles d'inférence . . . . .	44
3.1.3	Preuves, conséquences et théorèmes en calcul propositionnel . . . . .	44
3.1.4	Calcul propositionnel et sémantique . . . . .	46
3.2	La déduction naturelle . . . . .	48
3.2.1	Schémas de déduction et sous-déductions . . . . .	49
3.2.2	Premières règles d'introduction et d'élimination des connecteurs . . . . .	50
3.2.3	Deuxièmes règles d'introduction et d'élimination des connecteurs . . . . .	51
	L'essentiel du chapitre 3 . . . . .	54
<b>Chapitre 4</b>	<b>La relation de conséquence en calcul propositionnel</b>	<b>55</b>
4.1	La notion de monde . . . . .	55
4.2	Satisfaction des formules par les mondes . . . . .	58
4.3	Mondes et relation de conséquence . . . . .	61
	L'essentiel du chapitre 4 . . . . .	65
<b>Partie II</b>	<b>Calcul des prédicats</b>	<b>67</b>
<b>Chapitre 5</b>	<b>Le langage prédicatif restreint</b>	<b>73</b>
5.1	Termes élémentaires, fonctions et prédicats . . . . .	73
5.1.1	Termes élémentaires . . . . .	75
5.1.2	Fonctions . . . . .	75
5.1.3	Prédicats . . . . .	76
5.1.4	Connecteurs . . . . .	78
5.2	Les quantificateurs . . . . .	79
5.2.1	Le quantificateur universel . . . . .	80
5.2.2	Le quantificateur existentiel . . . . .	82
5.2.3	Equivalence des quantificateurs universel et existentiel . . . . .	84
	L'essentiel du chapitre 5 . . . . .	89
<b>Chapitre 6</b>	<b>Le langage de la logique des prédicats</b>	<b>91</b>
6.1	Les formules du langage des prédicats . . . . .	91
6.2	Variables libres, variables liées, substitutions . . . . .	93
	L'essentiel du chapitre 6 . . . . .	97

<b>Chapitre 7</b>	<b>La déduction en calcul des prédicats</b>	<b>99</b>
7.1	La déduction axiomatique . . . . .	99
7.1.1	Axiomes et règles d'inférence du calcul des prédicats . .	99
7.1.2	Preuves, théorèmes et conséquences en calcul des prédicats	100
7.2	La déduction naturelle en logique du premier ordre . . . . .	102
7.3	Validité des formules et modèles en logique du premier ordre . .	104
7.3.1	Validité d'une formule close . . . . .	105
7.3.2	Cas des formules libres . . . . .	108
7.3.3	Formules logiquement valides . . . . .	110
7.3.4	Formes prénexes . . . . .	112
7.3.5	La caractérisation sémantique des théorèmes en calcul des prédicats . . . . .	113
7.4	La relation de conséquence en logique du premier ordre . . . . .	114
	L'essentiel du chapitre 7 . . . . .	116
<b>Chapitre 8</b>	<b>Théories axiomatiques</b>	<b>117</b>
8.1	La notion de théorie axiomatique . . . . .	117
8.2	L'arithmétique et les axiomes de Péano . . . . .	120
8.3	Le théorème d'incomplétude de Gödel . . . . .	121
8.3.1	Le codage des formules . . . . .	121
8.3.2	Codage des relations arithmétiques . . . . .	122
<b>Solutions des exercices</b>		<b>125</b>
	Solutions des exercices du chapitre 1 . . . . .	125
	Solutions des exercices du chapitre 2 . . . . .	133
	Solutions des exercices du chapitre 3 . . . . .	138
	Solutions des exercices du chapitre 4 . . . . .	143
	Solutions des exercices du chapitre 5 . . . . .	148
	Solutions des exercices du chapitre 6 . . . . .	155
	Solutions des exercices du chapitre 7 . . . . .	157
	Solutions des exercices du chapitre 8 . . . . .	161
	Solution du test . . . . .	162
<b>Index</b>		<b>163</b>