Chapitre 1

Le langage naturel restreint

La plupart des phrases affirmatives ou négatives du langage naturel expriment des assertions qui peuvent être vraies ou fausses. Par exemple, même si on ne connait ni Pierre ni Marie, on peut imaginer que la phrase *'Pierre aime Marie'* est vraie, comme on peut imaginer qu'elle est fausse. De même, l'assertion *'Il a plu à Paris le 13 février 1807 à 4h17'* peut être qualifiée de *vraie* ou *fausse*, même si personne ne pourra jamais le vérifier. On appellera *proposition* toute phrase de ce type, c'est-à-dire toute phrase du langage naturel pour laquelle il y a un sens à dire qu'elle est vraie ou qu'elle est fausse. Notons qu'il existe des phrases affirmatives qui ne sont pas des propositions. Par exemple, une assertion telle *'L'addition baigne son incident'* n'est ni vraie ni fausse : elle n'exprime rien, bien qu'elle soit syntaxiquement correcte. De même, la phrase *'Cette phrase est un mensonge'* ne constitue pas une proposition, dans la mesure où la déclarer vraie ou fausse mène immanquablement à une contradiction : s'il est vrai que cette phrase est un mensonge, ce qu'elle dit est faux, donc cette phrase n'est pas un mensonge. Et s'il est faux que cette phrase est un mensonge, ce qu'elle dit est vrai, donc c'est un mensonge.

Les différentes étapes qui jalonnent un raisonnement s'expriment toujours par des assertions qui peuvent être vraies ou fausses, et qui sont donc des propositions. C'est pour cette raison que le domaine langagier de la logique ne peut couvrir l'ensemble du langage naturel et doit être réduit aux seules propositions de ce langage. Le langage *restreint* auquel on va s'intéresser est donc un langage dérivé du langage naturel, moins riche, dépourvu de nuances, et dans lequel les propositions seront appréhendées par leur signification et non par leur forme. La construction de ce langage naturel restreint se fera à partir de *propositions élémentaires* sur lesquelles opéreront des *connecteurs* qui permettront ensuite de former toutes les propositions du langage.

1.1 Propositions élémentaires

Nous considérerons tout d'abord les *propositions élémentaires* du langage. Elles correspondent à des phrases minimales affirmatives du langage naturel, et sont du type *'il pleut'*, *'les étudiants sont pauvres'*, *'Pierre aime Marie'*... Ce sont des *propositions*, dans le sens défini au paragraphe précédent, et on peut donc leur associer *une valeur de vérité*, *vrai* ou *faux*, qui n'est pas nécessairement immuable et qui reflète l'état du monde en un lieu et à un moment précis. Si p est une telle proposition, on désignera par $v(p)$ sa 'valeur de vérité' en convenant que $v(p) = 1$ si p est vraie et que $v(p) = 0$ si p est fausse. Par exemple on aura

$$v(\textit{'Paris est capitale de l'Angleterre'}) = 0$$

$$v(\textit{'Paris est capitale de la France'}) = 1$$

1.2 Les connecteurs de base

À partir des propositions élémentaires, il est possible de construire des propositions plus complexes, soit en en formant la *négation*, soit en utilisant les connecteurs de *conjonction*, de *disjonction* ou d'*implication*.

1.2.1 La négation

On passe d'une proposition p à sa négation par le biais du symbole $\neg$. Si par exemple p est la proposition élémentaire *'Pierre mange sa soupe'*, sa négation sera notée $\neg p$ (lire : *non* p) et exprimera la proposition *'Pierre ne mange pas sa soupe'*. Notons que $\neg p$ n'est plus une proposition élémentaire puisque ce n'est pas une proposition affirmative.

La valeur de vérité de $\neg p$ se déduit aisément de la valeur de vérité de p : dans notre exemple, si l'assertion *'Pierre mange sa soupe'* est *vraie*, l'assertion *'Pierre ne mange pas sa soupe'* est *fausse* ; de même, si l'assertion *'Pierre mange sa soupe'* est *fausse*, l'assertion *'Pierre ne mange pas sa soupe'* est *vraie*.

Ainsi, si p est *vraie*, sa négation est *fausse*, et si p est *fausse*, sa négation est *vraie*, de sorte que $v(\neg p) = 1$ quand $v(p) = 0$, et $v(\neg p) = 0$ quand $v(p) = 1$.

On peut résumer en un tableau, appelé *table de vérité*, les différentes valeurs prises par $\neg p$:

p	$\neg p$
1	0
0	1

1.2.2 La conjonction

La conjonction de deux propositions, notée par le symbole $\wedge$, traduit le *'et'* du langage naturel. Ainsi, si p est la proposition *'Pierre mange sa soupe'* et q la proposition *'Jacques travaille'*, la proposition $p \wedge q$ traduit la phrase *'Pierre mange sa soupe et Jacques travaille'*. Il est clair que cette nouvelle proposition n'est vraie que si chacun de ses constituants est vrai : par exemple, elle sera fausse si Jacques ne travaille pas, que Pierre mange effectivement sa soupe ou non. On a donc $v(p \wedge q) = 1$ si $v(p) = 1$ et $v(q) = 1$, et $v(p \wedge q) = 0$ dans les trois autres cas. Dès que l'une des valeurs $v(p)$ ou $v(q)$ est égale à 0, il en est de même de $v(p \wedge q)$.

La table de vérité de la conjonction est donc donnée par le tableau

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Exercice. *(solution p. 125)*

1.1. Soient les propositions élémentaires p : *'Pierre aime Marie'* et q : *'Pierre veut épouser Marie'*.

a) Exprimez les proposition suivantes : *'Pierre aime Marie et il veut l'épouser'*, *'Pierre aime Marie mais il ne veut pas l'épouser'*, et *'Pierre n'aime pas Marie mais il veut l'épouser'*.

b) Si p est vraie et q est fausse, que peut-on dire de la proposition exprimée en a) ?

c) Que signifie $q \wedge p$?

1.2.3 La disjonction

La disjonction correspond au *'ou'* du langage naturel et se note $\vee$. Ainsi, si p est la proposition *'Pierre se promène le samedi'* et q la proposition *'Pierre se promène le dimanche'*, $p \vee q$ traduit la proposition *'Pierre se promène le samedi ou le dimanche'*, qu'on peut éventuellement transcrire en *'Pierre se promène au cours du week-end'*.

Remarque 1.1. Il faut garder à l'esprit que le *'ou'* auquel on fait référence n'est pas 'exclusif' : dans l'exemple précédent, le fait que Pierre se promène le samedi n'exclut pas qu'il se promène également le dimanche. La disjonction ne traduit donc pas le *ou exclusif*, tel qu'il apparait par exemple dans l'adage *'Boire ou conduire, il faut choisir'* : $p \vee q$ correspond à une situation dans laquelle p et q peuvent simultanément se réaliser.

La proposition $p \vee q$ est vraie dès que l'un des ses constituants est vrai : affirmer que Pierre se promène le samedi ou le dimanche est vérifié dès lors qu'il est vrai que Pierre se promène l'un ou l'autre de ces jours. Par contre, ce sera faux s'il est avéré que Pierre ne se promène ni le samedi ni le dimanche. On a donc $v(p \vee q) = 1$ dès que $v(p) = 1$ ou $v(q) = 1$, et $v(p \vee q) = 0$ si l'on a à la fois $v(p) = 0$ et $v(q) = 0$.

La table de vérité de la disjonction est donc la suivante :

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Exercice. *(solution p. 125)*

1.2. Soient les propositions élémentaires p : *'Marie épousera un homme beau'* et q : *'Marie épousera un homme riche'*.

a) Exprimez la proposition *'Marie épousera un homme beau ou riche'*.

b) Si p est fausse et q est vraie, que peut-on dire de la proposition exprimée en a) ?

1.2.4 L'implication

Contrairement à sa signification usuelle, qui suppose entre deux propositions un lien sémantique de type cause-effet, il ne faut voir dans l'implication logique qu'un simple procédé syntaxique qui permet à partir de propositions élémentaires p et q d'écrire la nouvelle proposition '*Si p alors q*'. Cette proposition se note $p \to q$, et elle se lit *'p flèche q'*, ou *'p implique q'*. Par exemple, si p est la proposition *'Pierre joue'* et q la proposition *'Marie se promène'*, la proposition $p \to q$ est la proposition *'Si Pierre joue, Marie se promène'*.

Remarque 1.2. Le connecteur $\to$ construit des propositions composées de la forme 'Si p alors q', mais il peut également être utilisé pour traduire des expressions équivalentes ou approchées : ainsi, si p est la proposition *'C'est l'hiver'* et q la proposition *'Il fait froid'*, $p \to q$ traduira aussi bien la phrase *'Quand c'est l'hiver, il fait froid'*, que les phrases *'En hiver, il fait froid'*, ou *'Il fait froid l'hiver'*.

La valeur de vérité dont hérite la proposition $p \to q$ est simple et en même temps difficile à comprendre : on convient que $p \to q$ n'est *faux* que dans un seul cas, celui où p est *vrai* et q est *faux* : dans les autres cas, $p \to q$ est vrai, même, donc, si p et q sont faux. Par exemple les propositions

- *'Si Paris est capitale de l'Italie, alors Rome est capitale de la France'* et
- *'Si Paris est capitale de l'Italie, alors Rome n'est pas capitale de la France'*

sont vraies toutes les deux, car elles sont de la forme $p \to q$ où p est la proposition fausse : *'Paris est capitale de l'Italie'*.

Si l'on se refère à p comme à l'*antécédent* de l'implication $p \to q$, et à q comme à son *conséquent*, on voit que :

Une implication n'est fausse que dans le cas ou l'antécédent est vrai et le conséquent est faux.

La table de vérité pour l'implication est donc

p	q	$p \to q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Exercices. *(solutions p. 125)*

1.3. Soient les propositions élémentaires p : *'il pleut'* et q : *'je reste à la maison'*.

a) Exprimez la proposition *'Quand il pleut, je reste à la maison'*.
b) Si p est fausse et q est vraie, que peut-on dire de cette proposition ?

1.4. Soient les propositions élémentaires p : *'c'est l'été'* et q : *'il fait chaud'*.

a) Exprimez la proposition *'En été il fait chaud'*.
b) Si p est fausse et q est fausse, que peut-on dire de cette proposition ?

1.5. La proposition *'Quand les vaches voleront les poules auront des dents'* est-elle vraie ou fausse ?

1.6. Évaluer les valeurs de vérité des propositions suivantes :

a) *'Si Paris n'est pas capitale de la France, alors Paris est capitale de la France.'*

b) *'Si Paris est capitale de la France, alors Paris n'est pas capitale de la France.'*

1.2.5 La double implication

Le dernier connecteur que l'on va introduire maintenant est la *double implication* ou *double flèche*, symbolisée par $\leftrightarrow$: la notation $p \leftrightarrow q$ traduit la proposition *'p si et seulement si q'*. Par exemple si p symbolise la proposition *'Pierre épouse Marie'* et q la proposition *'Pierre trouve un appartement'*, la proposition $p \leftrightarrow q$ s'interprète par *'Pierre épouse Marie si et seulement si il trouve un appartement'*, ou par *'Pierre n'épouse Marie que s'il trouve un appartement'*. La proposition $p \leftrightarrow q$ se lit '*p double-flèche q*' ou '*p si et seulement si q*' ou encore '*p équivalent à q*'.

On obtient facilement la table de vérité de $p \leftrightarrow q$ en remarquant que la proposition *'p si et seulement si q'* est vraie dès que p et q sont toutes les deux vraies ou qu'elles sont toutes les deux fausses :

p	q	$p \leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

On a ainsi

$$v(p \leftrightarrow q) = 1 \text{ si } v(p) = v(q)$$
$$v(p \leftrightarrow q) = 0 \text{ si } v(p) \neq v(q).$$

Exercice. *(solution p. 126)*

1.7. Soient les propositions élémentaires p : *'Marie se promène'* et q : *'il fait beau'*.

a) Exprimez la proposition *'Marie ne se promène que quand il fait beau'*.

b) Comparez le résultat avec la proposition *'Marie se promène chaque fois qu'il fait beau'*.

c) Soit maintenant r la proposition *'Marie est heureuse'*. Traduire la proposition *'Marie n'est heureuse que quand il fait beau'*.

1.3 Les propositions du langage naturel restreint

1.3.1 La composition des propositions

Appliqués à des propositions élémentaires, les connecteurs construisent des propositions *composées*. Il est possible d'appliquer à nouveau à ces dernières les connecteurs de négation ($\neg$), conjonction ($\wedge$), disjonction ($\vee$), implication ($\rightarrow$) ou double implication ($\leftrightarrow$). Ainsi, à partir des propositions

p : *'Jacques se promène le samedi'*,
q : *'Jacques se promène le dimanche'*, et
r : *'il pleut'*,

on peut former la proposition composée $\neg r \rightarrow (p \vee q)$, qui se traduira par

'S'il ne pleut pas, Jacques se promène le week-end'.

La valeur de vérité d'une proposition composée s'obtient à partir de la valeur de vérité de ses constituants comme dans le cas des propositions élémentaires :

- $v(\neg A) = 1$ si et seulement si $v(A) = 0$
- $v(A \wedge B) = 1$ si et seulement si $v(A) = v(B) = 1$
- $v(A \vee B) = 0$ si et seulement si $v(A) = v(B) = 0$
- $v(A \rightarrow B) = 0$ si et seulement si $v(A) = 1$ et $v(B) = 0$
- $v(A \leftrightarrow B) = 1$ si et seulement si $v(A) = v(B)$.

L'ensemble des propositions élémentaires et des propositions obtenues en appliquant une ou plusieurs fois les connecteurs de base permet d'écrire toutes les *propositions* qui formeront le *langage naturel restreint*.

Plus précisément, on convient que

1. Les propositions élémentaires sont des propositions du langage naturel restreint
2. Si A est une proposition de ce langage, il en est de même de $\neg A$
3. Si A et B sont des propositions de ce langage, il en est de même de $A \vee B$, $A \wedge B$, $A \rightarrow B$ et $A \leftrightarrow B$
4. Il n'existe pas d'autres propositions dans le langage que celles formées à partir de 1, 2 et 3.[1]

1. On voit ici pourquoi ce langage est qualifié de langage naturel *restreint* : avec un nombre très limité de connecteurs et l'impossibilité de faire des relatives ou des conjonctives, il reste privé de

Exercices. *(solutions p. 126)*

1.8. On considère les propositions suivantes :
f : *'il fait froid'*
p : *'il pleut'*
h : *'c'est l'hiver'*
Traduire en langage propositionnel la phrase suivante :
'En hiver, il fait froid ou il pleut'. (Voir remarque 1.2, p. 11.)

1.9. On considère les propositions suivantes :
f : *'il fait froid'*
p : *'il pleut'*
h : *'c'est l'hiver'*
i : *'les routes sont inondées'*
e : *'les routes sont encombrées'*
Traduire en langage propositionnel la phrase suivante :
'En hiver, il fait froid ou il pleut, et quand il pleut, les routes qui ne sont pas inondées sont encombrées'.

1.10. Soient les propositions suivantes :
p : *'je pars'*
q : *'tu restes'*
r : *'il y a quelqu'un à la maison'*
Interpréter les trois propositions suivantes :

a) $(p \wedge \neg q) \to \neg r$
b) $\neg q \to (p \wedge \neg r)$
c) $(p \to q) \to \neg p$

1.3.2 Arbre de décomposition d'une proposition

D'après ce qui précède, toute proposition P qui n'est pas une proposition élémentaire est de la forme $\neg A, A \vee B, A \wedge B, A \to B$ ou $A \leftrightarrow B$. Les propositions A et B qui interviennent ainsi dans la structure de P sont appelées

toute possibilité de nuances et ne traduit que très approximativement, voire pas du tout, la richesse du langage naturel. Ainsi les phrases *'Pierre aime Marie mais il ne veut pas l'épouser'*, *'Pierre ne veut pas épouser Marie, mais il l'aime'*, *'Pierre aime Marie, et pourtant il ne veut pas l'épouser'*, *'Bien que Pierre aime Marie, il ne veut pas l'épouser'* se traduisent toutes en langage restreint par la même proposition : *'Pierre aime Marie et Pierre ne veut pas épouser Marie'*. Les phrases complexes de type *causal* (*'Pierre veut épouser Marie parce qu'il l'aime'*), *temporel* (*'Tantôt il fait beau, tantôt il pleut'*) ou *modal* (*'Il vaut mieux que Pierre travaille'*) sont proprement intraduisibles. Même la simple conjonction *'et'* est très souvent chargée d'un sens causal ou temporel qui ne peut passer dans le langage restreint, comme on peut le voir dans la phrase *'Il s'est fâché et il est parti'*.