

Table des matières

1. COMPLÉMENTS D'ALGÈBRE LINÉAIRE	1
I. Produit et somme	1
A. Produit	1
B. Sommes	2
C. Décomposition de E en somme directe	4
II. Matrices et endomorphismes	5
A. Stabilité et blocs	5
B. Similitude, trace	7
III. Déterminants classiques	9
Exercices	10
Travaux dirigés	28
Noyaux itérés	28
Commutateurs	31
Automorphismes de $\mathcal{L}(E)$	32
Splines cubiques	35
2. RÉDUCTION	37
I. Éléments propres	37
A. Cas d'un endomorphisme	37
B. Cas d'une matrice	39
C. Polynôme caractéristique	40
II. Réduction en dimension finie	43
A. Endomorphisme diagonalisable	43
B. Matrice diagonalisable	44
C. Puissances d'une matrice diagonalisable	45
D. Trigonalisation	47
Exercices	48
Travaux dirigés	58
Convergence de (A^m)	58
Problème de Dirichlet discret	59
Endomorphismes de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ conservant le rang	62
Produit tensoriel	66

3. ESPACES VECTORIELS NORMÉS	69
I. Normes et distances	69
A. Définitions	69
B. Exemples fondamentaux	71
C. Applications lipschitziennes	73
D. Comparaison des normes	74
II. Suites	75
A. Nature d'une suite	75
B. Propriétés	76
C. Théorème de Bolzano-Weierstrass	77
III. Topologie d'un espace vectoriel normé	78
A. Point intérieur, partie ouverte	78
B. Point adhérent, partie fermée	79
C. Adhérence, intérieur, frontière	80
IV. Limite et continuité	81
A. Limite	81
B. Continuité en un point	83
C. Continuité sur une partie	83
D. Applications linéaires ou multilinéaires	85
Exercices	86
Travaux dirigés	95
Intersection de boules fermées	95
Distance d'un point à une partie	96
Commutant d'une matrice	97
4. SUITES ET SÉRIES	99
I. Séries numériques	99
A. Comparaison à une intégrale	99
B. Règle de d'Alembert	100
C. Formule de Stirling	101
D. Théorème spécial des séries alternées	102
E. Produit de Cauchy	103
II. Suites et séries de fonctions	105
A. Modes de convergence	105
B. Permutations de limites	110
III. Séries entières	112
A. Rayon de convergence	112
B. Régularité de la somme	115
C. Fonctions développables en série entière	117
Exercices	119

Travaux dirigés	140
Sommaton de relations de comparaison	140
Convergence monotone	142
Théorème de Bernstein	143
Comportement aux bornes de l'intervalle de convergence	146
5. FONCTIONS VECTORIELLES, ARCS PARAMÉTRÉS	149
I. Dérivabilité	149
A. Généralités	149
B. Opérations	150
C. Classe \mathcal{C}^k	152
II. Arcs paramétrés	154
A. Généralités	154
B. Arcs plans	155
Exercices	157
Travaux dirigés	165
Compacts admissibles de \mathbb{C}	165
Approximée n -ième	168
6. INTÉGRATION	173
I. Fonctions continues par morceaux	173
A. Généralités	173
B. Intégrale sur un segment	174
II. Intégrales généralisées	175
A. Convergence, absolue convergence	175
B. Intégrabilité	177
C. Calcul effectif	180
III. Suites et séries de fonctions intégrables	181
A. Théorème de convergence dominée	181
B. Intégration terme à terme	182
C. Utilisation des deux théorèmes dans le cas positif	183
IV. Intégrales à paramètre	183
A. Continuité	183
B. Classe \mathcal{C}^k	184
C. Exemple de la fonction Γ	185
Exercices	186
Travaux dirigés	203
Transformation de Laplace	203
Application de la transformation de Laplace à un système différentiel	206
Formule de Stirling	207
Calcul de $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^n dt$	208
Fonction définie par une intégrale	210
Intégration des relations de comparaison	212

7. ESPACES EUCLIDIENS	215
I. Isométries vectorielles	215
A. Définition	215
B. Groupe orthogonal	215
C. Symétries orthogonales	216
II. Matrices orthogonales	217
A. Définitions	217
B. Orientation	218
III. Isométries vectorielles d'un plan euclidien	218
A. Notations	218
B. Groupe des rotations	218
C. Ensemble des isométries indirectes	219
IV. Matrices symétriques réelles	220
A. Théorème spectral	220
B. Projections et symétries orthogonales	220
Exercices	221
Travaux dirigés	231
Caractérisations des espaces euclidiens	231
Matrice symétrique positive	233
Polynômes orthogonaux ; généralités	236
Polynômes de Legendre	239
Polynômes de Tchebychev de première espèce	243
Déterminant de Gram	244
Endomorphismes antisymétriques	247
8. PROBABILITÉS	251
I. Espaces probabilisés	251
A. Ensembles dénombrables	251
B. Espaces probabilisés	252
C. Conditionnement et indépendance	255
II. Variables aléatoires discrètes	257
A. Variable discrète et loi	257
B. Couple de variables aléatoires	259
C. Lois discrètes usuelles	261
D. Moments d'une variable aléatoire	265
E. Fonctions génératrices	270
Exercices	273
Travaux dirigés	282
Autour des records	282
Somme de variables aléatoires	286

9. CALCUL DIFFÉRENTIEL	291
I. Dérivées partielles d'ordre 1	291
A. Généralités	291
B. Règle de la chaîne	293
C. Gradient	294
D. Applications géométriques	295
II. Dérivées partielles d'ordre 2	297
A. Généralités	297
B. Extremum	298
Exercices	300
Travaux dirigés	306
Équations aux dérivées partielles	306
Équation de la chaleur	308
10. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES	313
I. Système différentiel	313
A. Généralités	313
B. Résolution d'un système différentiel	314
II. Équations différentielles linéaires scalaires	316
A. Équation d'ordre n	316
B. Cas d'une équation d'ordre 2	317
Exercices	319
Travaux dirigés	326
Lemme de Gronwall ; applications	326
Méthode d'approximation d'Euler	329
Wronskien et entrelacement de Sturm	330