

1. COMPLÉMENTS

D'ALGÈBRE LINÉAIRE

Ce chapitre suppose acquises plusieurs notions du cours d'algèbre linéaire de première année : espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels, dimension, applications linéaires et matrices. Seules les notions spécifiquement au programme de seconde année sont abordées en cours, exercices et travaux dirigés permettront néanmoins une révision complète du programme de première année.

\mathbb{K} désigne l'un des corps \mathbb{R} ou \mathbb{C} , E et F sont des \mathbb{K} -espaces vectoriels.

I. Produit et somme

A. Produit

Si E_1, \dots, E_p sont des \mathbb{K} -espaces vectoriels alors on vérifie que $E_1 \times \dots \times E_p$ muni des lois définies par $\begin{cases} (x_1, \dots, x_p) + (y_1, \dots, y_p) = (x_1 + y_1, \dots, x_p + y_p) \\ \lambda(x_1, \dots, x_p) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_p) \end{cases}$ est aussi un \mathbb{K} -espace vectoriel.

q est un élément de \mathbb{N}^* , $q \geq 2$, E_1, \dots, E_q sont des sous-espaces vectoriels de E .

Exemple

Si $(n_1, \dots, n_p) \in \mathbb{N}^p$ alors $\mathbb{K}^{n_1} \times \dots \times \mathbb{K}^{n_p} = \mathbb{K}^{n_1 + \dots + n_p}$.

Théorème

Si E_1, \dots, E_p sont de dimension finie alors $E_1 \times \dots \times E_p$ est aussi de dimension finie et $\dim(E_1 \times \dots \times E_p) = \sum_{i=1}^p \dim(E_i)$.

Démonstration

Si (e_1, \dots, e_n) est une base de E alors $\varphi : \begin{pmatrix} \mathbb{K}^n & \rightarrow & E \\ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) & \mapsto & \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \end{pmatrix}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels dit associé à la base.

Soient e_1, \dots, e_p des bases respectives de E_1, \dots, E_p et $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ les isomorphismes associés.

Alors $\Phi : \begin{pmatrix} \mathbb{K}^{n_1} \times \dots \times \mathbb{K}^{n_p} & \rightarrow & E_1 \times \dots \times E_p \\ (\Lambda_1, \dots, \Lambda_p) & \mapsto & (\varphi_1(\Lambda_1), \dots, \varphi_p(\Lambda_p)) \end{pmatrix}$ est, par construction, un isomorphisme si l'on note n_1, \dots, n_p les dimensions respectives de E_1, \dots, E_p .

Par suite $\dim(E_1 \times \cdots \times E_p) = \dim(\mathbb{K}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{K}^{n_p}) = \dim(\mathbb{K}^{n_1 + \cdots + n_p})$ soit $\dim(E_1 \times \cdots \times E_p) = \sum_{i=1}^p \dim(E_i)$. \square

B. Sommes

On note E_1, \dots, E_p des sous-espaces vectoriels du même espace vectoriel E .

1. Définitions

Définition

On note $\sum_{i=1}^p E_i$ l'ensemble $\left\{ \sum_{i=1}^p x_i \mid (x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p \right\}$.

Remarques

1. L'application Ψ de $E_1 \times \cdots \times E_p$ dans E définie par $\Psi(x_1, \dots, x_p) = \sum_{i=1}^p x_i$ est linéaire, son image est $\sum_{i=1}^p E_i$, donc un sous-espace vectoriel de E .

2. Si on note Φ l'application de $E_1 \times \cdots \times E_p$ dans $\sum_{i=1}^p E_i$ définie par :

$\Phi(x_1, \dots, x_p) = \sum_{i=1}^p x_i$, Φ est linéaire surjective.

3. $\sum_{i=1}^p E_i$ est le sous-espace vectoriel $\text{Vect} \left(\bigcup_{i=1}^p E_i \right)$ engendré par $\bigcup_{i=1}^p E_i$ car c'est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant cette partie.

Exemple

Si $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_0[X] \subset \mathbb{K}_1[X] \subset \cdots \subset \mathbb{K}_n[X]$ d'où $\sum_{i=0}^n \mathbb{K}_i[X] = \mathbb{K}_n[X]$.

Définition

On dit que $\sum_{i=1}^p E_i$ est une somme directe, et on la note alors $\bigoplus_{i=1}^p E_i$, si l'application $\Phi : E_1 \times \cdots \times E_p \rightarrow \sum_{i=1}^p E_i$, $(x_1, \dots, x_p) \mapsto \sum_{i=1}^p x_i$ est un isomorphisme de \mathbb{K} -espaces vectoriels.

Théorème

Il y a équivalence entre :

(i) $\sum_{i=1}^p E_i$ est directe ;

(ii) La seule décomposition de 0_E dans $\sum_{i=1}^p E_i$ est $0_E = \sum_{i=1}^p 0_{E_i}$;

$$\left. \begin{array}{l} \text{(iii)} \quad \forall x \in \sum_{i=1}^p E_i, \exists!(x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p, x = \sum_{i=1}^p x_i ; \\ \text{(iv)} \quad \forall k \in [1, p[, \left(\sum_{i=1}^k E_i \right) \cap E_{k+1} = \{0_E\}. \end{array} \right\}$$

Démonstration

• Comme Φ est linéaire surjective et comme la condition (ii) exprime son injectivité on a immédiatement l'équivalence entre (i) et (ii).

• De même (iii) signifie que Φ est bijective, d'où (i) \iff (iii).

• Supposons (i), choisissons k dans $[1, p[$ puis x dans $\left(\sum_{i=1}^k E_i \right) \cap E_{k+1}$, écrivons

$$x = \sum_{i=1}^k x_i \text{ où } (x_1, \dots, x_k) \in E_1 \times \dots \times E_k.$$

On a $x = \Phi(x_1, \dots, x_k, 0_{E_{k+1}}, \dots, 0_{E_p}) = \Phi(0_{E_1}, \dots, 0_{E_k}, x, 0_{E_{k+2}}, \dots, 0_{E_p})$, d'où $x = 0_{E_{k+1}} = 0_E$ par injectivité de Φ .

• Supposons (iv) et (x_1, \dots, x_p) dans $\text{Ker}(\Phi) \setminus \{0_E\}$.

Avec $k' = \max \{i \in [1, p] \mid x_i \neq 0_E\}$ on a $k' > 1$ et, en posant $k = k' - 1$,

$k \in [1, p[$ et aussi $x_{k+1} = \sum_{i=1}^k (-x_i) \in \left(\sum_{i=1}^k E_i \right) \cap E_{k+1} = \{0_E\}$: absurde. Donc Φ est injective et (iv) \Rightarrow (i). \square

2. Supplémentaires

Définition

Deux sous-espaces vectoriels de V et W de E sont dits supplémentaires si $E = V \oplus W$.

Remarque

V et W sont supplémentaires si, et seulement si, tout x de E s'écrit de façon unique $x = v + w$ où $(v, w) \in V \times W$ ou encore si, et seulement si, l'application $\Phi : V \times W \rightarrow E, (v, w) \mapsto v + w$ est un isomorphisme de \mathbb{K} -espaces vectoriels, c'est à dire si, et seulement si, $V \cap W = \{0_E\}$.

Exemple

Soit P élément de $\mathbb{K}[X]$ de degré $n+1$ où $n \in \mathbb{N}$ et (P) l'ensemble de ses multiples, $(P) = \{AP \mid A \in \mathbb{K}[X]\}$, alors $\mathbb{K}_n[X]$ et (P) sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{K}[X]$.

En effet, ce sont facilement deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}[X]$ et le théorème de division euclidienne montre que tout élément A de $\mathbb{K}[X]$ s'écrit de façon unique $A = S + R$ où $S \in (P)$ et $R \in \mathbb{K}_n[X]$.

3. Cas de la dimension finie

Théorème

Si E est de dimension finie alors $\dim \left(\sum_{i=1}^p E_i \right) \leq \sum_{i=1}^p \dim(E_i)$ et il y a égalité si, et seulement si, $\sum_{i=1}^p E_i$ est directe.

Démonstration

Comme $\Phi : E_1 \times \dots \times E_p \rightarrow \sum_{i=1}^p E_i$, $(x_1, \dots, x_p) \mapsto \sum_{i=1}^p x_i$ est linéaire surjective on a l'inégalité. La somme est directe si, et seulement si, Φ est un isomorphisme de \mathbb{K} -espaces vectoriels *ie.* si, et seulement si, $E_1 \times \dots \times E_p$ et $\sum_{i=1}^p E_i$ sont de même dimension, d'où le résultat. \square

Dans le cas $q = 2$ on obtient immédiatement le

Corollaire

En dimension finie n , si V est un sous-espace vectoriel de dimension p alors tout supplémentaire est de dimension $n - p$.
Si W est un sous-espace vectoriel de dimension $n - p$ alors il est supplémentaire de V si, et seulement si, $V \cap W = \{0_E\}$.

C. Décomposition de E en somme directe

Ici E est de dimension $n \geq 1$ et on suppose $E = \bigoplus_{i=1}^p E_i$.

Théorème et définitions

Si, pour tout i de $\llbracket 1, p \rrbracket$, e_i désigne une **base** de E_i , alors la famille e obtenue en réunissant les e_i est une base de E , elle est dite **adaptée** à la décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^p E_i$.
Si F est un sous-espace vectoriel de E , une base est dite adaptée à F si ses premiers éléments constituent une base de F .

Démonstration

e étant de cardinal $n = \sum_{i=1}^p \dim(E_i)$, il suffit de montrer qu'elle est génératrice de E . Si $x \in E$, $x = \sum_{i=1}^p x_i$ où $(x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p$, on a, pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $x_i \in E_i = \text{Vect}(e_i)$ et donc, par sommation, $x \in \text{Vect}(e)$, ce qui termine la preuve. \square

Exemple

Avec ces notations, si $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\dim(E_i) = n_i$ la matrice notée P_i relativement à e du projecteur p_i associé à la décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^p E_i$ est diagonale par blocs égale à $\text{Diag}(0_{n_1}, \dots, 0_{n_{i-1}}, I_{n_i}, 0_{n_{i+1}}, \dots, 0_{n_p})$, la relation $\sum_{i=1}^p p_i = I_E$ équivaut à

$$\sum_{i=1}^p P_i = I_n, \text{ qui est immédiate.}$$

De la même façon si l'on fractionne la base e de E en p sous-familles e_1, \dots, e_p où $e = (e_1, \dots, e_n)$, $e_1 = (e_1, \dots, e_{n_1})$, $e_2 = (e_{n_1+1}, \dots, e_{n_1+n_2})$, \dots ,

$e_{n_p} = (e_{n_1+\dots+n_{p-1}+1}, \dots, e_n)$ avec n_1, \dots, n_p entiers de somme n il vient la

Propriété

Si, pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ on pose $E_i = \text{Vect}(e_i)$ alors $E = \bigoplus_{i=1}^p E_i$ et e est adaptée à cette décomposition.

II. Matrices et endomorphismes

A. Stabilité et blocs

1. Blocs

Un calcul fastidieux mais sans mystère montre le

Théorème

Si $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $M' = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ où $A \in \mathfrak{M}_{r,s}(\mathbb{K})$ et $A' \in \mathfrak{M}_{s,t}(\mathbb{K})$ alors $MM' = \begin{pmatrix} AA' + BC' & AB' + BD' \\ CA' + DC' & CB' + DD' \end{pmatrix}$.

Remarque

Dès que $n = p$ on impose $r = s$ afin que les blocs diagonaux soient des blocs carrés.

Corollaire

Le produit, lorsqu'il existe, de deux matrices carrées triangulaires supérieures (resp. inférieures) est une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure).

Démonstration

Par transposition il suffit de traiter le cas des matrices triangulaires supérieures.

On raisonne par récurrence sur le nombre n de lignes et de colonnes, le cas $n = 1$ étant immédiat.

Si le résultat est prouvé pour des éléments de $\mathcal{T}_n(\mathbb{K})$ et si $(A, B) \in (\mathcal{T}_{n+1}(\mathbb{K}))^2$,

on écrit $A = \begin{pmatrix} \alpha & U \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \beta & V \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}$ où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ et $(A_1, B_1) \in (\mathcal{T}_n(\mathbb{K}))^2$,

alors $AB = \begin{pmatrix} \alpha\beta & \alpha V + UB_1 \\ 0 & A_1 B_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{T}_{n+1}(\mathbb{K})$ par hypothèse de récurrence. \square

Dans le même genre d'idée on va montrer le

Théorème

Si $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ alors M est inversible si, et seulement si, A et D le sont. Si c'est le cas alors $M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix}$.

Démonstration

Posons $M' = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$, alors on a $MM' = \begin{pmatrix} AA' + BC' & AB' + BD' \\ DC' & DD' \end{pmatrix}$ et donc

$MM' = I_n$ a lieu si, et seulement si, $\begin{cases} DD' = I_{n-r} \\ DC' = 0 \\ AA' + BC' = I_r \\ AB' + BD' = 0 \end{cases}$

Ce système se résout facilement en D inversible et $D' = D^{-1}$, $C' = 0$, A inversible et $A' = A^{-1}$ et enfin $B' = -A^{-1}BD^{-1}$, ce qui établit le théorème. \square

2. Stabilité

F désigne un sous-espace vectoriel de E et u un endomorphisme de E .

2.1. Définition

1. F est dit stable par u si $u(F) \subset F$ ie. si, pour tout x dans F , $u(x) \in F$.
2. Dans ce cas on appelle **endomorphisme induit** par u sur F l'endomorphisme de F qui à tout x associe $u(x)$.

Remarques

1. Ne pas confondre l'endomorphisme induit qui est élément de $\mathcal{L}(F)$ et la restriction $u|_F$ qui est élément de $\mathcal{L}(F, E)$.
2. F est stable par u si, et seulement si, pour toute projection p sur F on a $p \circ u|_F = u|_F$ ou encore $p \circ u \circ p = u \circ p$.
3. Si \tilde{u} est l'endomorphisme induit par u sur F alors $\text{Ker}(\tilde{u}) = \text{Ker}(u) \cap F$ et $\text{Im}(\tilde{u}) = u(F)$.

Exemple

Soient $E = \mathbb{K}[X]$ et $\Delta : P(X) \mapsto P(X+1) - P(X)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, Δ induit un endomorphisme Δ_n de $\mathbb{K}_{n+1}[X]$.

Si $P \in \text{Ker}(\Delta)$ alors $x \mapsto P(x) - P(0)$ est 1-périodique, nulle en 0 donc sur \mathbb{Z} infini d'où $P(X) = P(0)$. Comme réciproquement $\mathbb{K}_0[X] \subset \text{Ker}(\Delta)$ cela montre que $\mathbb{K}_0[X] = \text{Ker}(\Delta) = \text{Ker}(\Delta_n)$ lequel est donc de dimension 1.

De plus $\text{Im}(\Delta_n) \subset \mathbb{K}_n[X]$ et le théorème de rang montre que ces deux espaces vectoriels ont même dimension, d'où $\text{Im}(\Delta_n) = \mathbb{K}_n[X]$.

Propriété

- Si v est un endomorphisme de E qui commute avec u alors $\text{Im}(v)$ et $\text{Ker}(v)$ sont stables par u

Démonstration

Si $y \in \text{Im}(v)$, $y = v(x)$ où $x \in E$, alors on a $u(y) = v[u(x)] \in \text{Im}(v)$ et, si $z \in \text{Ker}(v)$, $v[u(z)] = u[v(z)] = 0$ donc $u(z) \in \text{Ker}(v)$. \square

2.2. Utilisation des blocs

On suppose E de dimension finie.

Théorème

- F est stable par u si, et seulement si, relativement à une base adaptée à F , la matrice de u est triangulaire supérieure par blocs.

Démonstration

Soit $e = (e_1, \dots, e_n)$ base adaptée à F avec $b = (e_1, \dots, e_p)$ base de F .

F est stable par u si, et seulement si, pour tout i de $\llbracket 1, p \rrbracket$, $u(e_i) \in F$ ou encore $u(e_i) \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$, ce qui revient à dire que la matrice de u relativement à e

est triangulaire supérieure par blocs, $\begin{pmatrix} A & B \\ 0_{n-p,p} & C \end{pmatrix}$. \square

Remarque

Si c'est vrai pour une base adaptée alors c'est vrai pour toute base adaptée.

On suppose alors $E = \bigoplus_{i=1}^p E_i$ et, pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on pose $\dim(E_i) = n_i \in \mathbb{N}^*$.
On démontre de la même façon le

Théorème

Chacun des E_i est stable par u si, et seulement si, il existe une base adaptée à la décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^p E_i$ relativement à laquelle la matrice M de u est diagonale par blocs, $M = \text{Diag}(M_1, \dots, M_p)$ où : $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $M_i \in \mathfrak{M}_{n_i}(\mathbb{K})$.

Remarques

1. On peut, dans cet énoncé, remplacer « il existe une base adaptée » par « pour toute base adaptée ».
2. Dans le cas où chacun des E_i est une droite dirigée par e_i on obtient : $M_{\mathcal{E}}(u)$ est diagonale si, et seulement si, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la droite E_i est stable par u ie. u induit une homothétie sur chaque E_i .

B. Similitude, trace

1. Matrices semblables

Définitions

Deux matrices A et B éléments de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ sont dites **semblables** s'il existe P dans $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$; cette relation est appelée **relation de similitude**.

Remarques

1. Si A est matrice d'un endomorphisme u d'un \mathbb{K} -ev E de dimension n alors A et B sont semblables si, et seulement si, B est aussi matrice de u au vu de la formule de changement de base. On en déduit que la relation de similitude est une relation d'équivalence.
2. Deux matrices semblables ont même déterminant.
3. On notera que l'équation (en P) $B = P^{-1}AP$ n'est pas linéaire mais que, en revanche, l'équation équivalente $PB - AP = 0_n$ l'est. Trouver les solutions P revient à trouver l'intersection du noyau de $\begin{pmatrix} \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) & \rightarrow & \mathfrak{M}_n(K) \\ P & \mapsto & PB - AP \end{pmatrix}$ et de $\text{GL}_n(\mathbb{K})$.

Exemple

Si $\lambda \in \mathbb{K}$ alors A n'est semblable à λI_n que si $A = \lambda I_n$.

2. Trace

Définition

Si $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est de coefficient générique $A_{i,j}$ on appelle **trace** de A , et on note $\text{tr}(A)$, le scalaire $\sum_{i=1}^n A_{i,i}$.

Remarque

L'application qui à A associe sa trace est linéaire.

Théorème

| Si $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathfrak{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ alors $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.

Démonstration

On a $\text{tr}(AB) = \sum_{i=1}^n (AB)_{i,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^p A_{i,k} B_{k,i} = \sum_{k=1}^p \sum_{i=1}^n B_{k,i} A_{i,k}$ en permutant les symboles \sum et en utilisant la commutativité de \mathbb{K} .

De même $\text{tr}(BA) = \sum_{k=1}^p (BA)_{k,k} = \sum_{k=1}^p \sum_{i=1}^n B_{k,i} A_{i,k}$ d'où l'égalité. \square

Remarque

On se gardera de penser que l'on a toujours $\text{tr}(ABC) = \text{tr}(BAC)$ comme le prouve l'exemple où $A = E^{1,2}$, $B = E^{2,1}$ et $C = E^{1,1}$ car $ABC = E^{1,2}E^{2,1}E^{1,1} = E^{1,1}$ de trace 1 alors que $BAC = E^{2,1}E^{1,2}E^{1,1} = 0_n$ de trace nulle. On a noté $E^{i,j}$ la matrice élémentaire i, j dont tous les coefficients sont nuls à l'exception du coefficient i, j qui est égal à 1.

On va par contre prouver le

Corollaire

| Si $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ alors $\text{tr}(P^{-1}AP) = \text{tr}(A)$, autrement dit deux matrices semblables ont même trace.

Démonstration

Posons $X = P^{-1}A$ et $Y = P$, alors $\text{tr}(XY) = \text{tr}(YX)$ ou encore $\text{tr}(P^{-1}AP) = \text{tr}(PP^{-1}A) = \text{tr}(A)$. \square

Cela permet de donner la

Définition

| Si u est un endomorphisme de E espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, on appelle trace de u et on note $\text{tr}(u)$ la trace d'une matrice de u relativement à une base e de E , étant entendu que cela ne dépend pas du choix de e .

Théorème

| Si E est de dimension finie et si p est un projecteur, alors $\text{tr}(p) = \text{rg}(p)$.

Démonstration

Dans une base adaptée à la décomposition $E = \text{Im}(p) \oplus \text{Ker}(p)$, p admet une matrice diagonale par blocs $P = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix}$ où $r = \dim[\text{Im}(p)] = \text{rg}(p)$ et le résultat est immédiat. \square

⤷ || Cela n'est pas caractéristique des projecteurs car, avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, on a $\text{tr}(A) = \text{rg}(A) = 2$ mais A n'est pas projecteur de rang 2 car $A \neq I_2$.

Remarque

Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $E^{i,i}$ est la matrice d'un projecteur de rang 1 car $(E^{i,i})^2 = E^{i,i}$ et $\text{tr}(E^{i,i}) = 1$.