1 - Raisonnement, vocabulaire ensembliste, calculs algébriques

Rappels de cours

Un ensemble est un *symbole* « doté de vertus » que l'on a coutume d'attribuer à une *collection d'objets*. Pour écrire que x est élément de E, on écrit $x \in E$.

L'ensemble sans élément est noté $\emptyset$.

Les ensembles sont susceptibles de satisfaire à certaines relations. Nous considérons comme comprise la notion de ***relation*** R.

On appelle ***négation*** de R, notée (non R) et alors non(non R) est R.

• ***Conjonction*** : c'est la relation (notée R_1 et R_2). Elle est vraie si R_1 et R_2 le sont.

• ***Disjonction*** de deux relations R_1, R_2 (notée R_1 ou R_2). Elle est vraie si l'une au moins des deux est vraie.

• ***Implication*** (notée $R_1 \Rightarrow R_2$) est : R_2 ou (non R_1).

• ***Équivalence*** : (notée $R_1 \iff R_2$). C'est ($R_1 \Rightarrow R_2$ et $R_2 \Rightarrow R_1$)

• ***Raisonnement par l'absurde*** :
montrer $R_1 \Rightarrow R_2$ est équivalent à : montrer (non R_2) $\Rightarrow$ (non R_1).

• ***Relation d'inclusion*** : si E et F sont deux ensembles, on dit que E est contenu dans F ou E est une partie de F si $x \in E \Rightarrow x \in F$.

• ***Relation d'égalité*** : $E = F$ si $E \subset F$ et $F \subset E$.

• ***Quantificateurs***
Pour tout x, la relation R est vérifiée : $\forall x, R$.

Il existe x tel que R soit vérifiée : $\exists x, R$.

$$\text{non } (\exists x \in E, R) \iff (\forall x \in E, \text{ non } R)$$
$$\text{non } (\forall x \in E, R) \iff (\exists x \in E, \text{ non } R)$$

• Opérations sur les parties d'un ensemble.

• $\mathcal{P}(E)$ ensemble des parties de l'ensemble E.

• $\complement_E(A) = E \setminus A = \overline{A}$ le complémentaire dans E de la partie A.

• ***Intersection et réunion de deux ensembles***

$x \in A \cap B \iff (x \in A)$ et $(x \in B)$
$x \in A \cup B \iff (x \in A)$ ou $(x \in B)$

$\complement_E(\emptyset) = E$ et $\complement_E(E) = \emptyset$,

$\complement_E(A \cup B) = \left(\complement_E(A)\right) \cap \left(\complement_E(B)\right)$ et $\complement_E(A \cap B) = \left(\complement_E(A)\right) \cup \left(\complement_E(B)\right)$.

$A \cap A = A$; $A \cap B = B \cap A$; $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

$A \cup A = A$; $A \cup B = B \cup A$; $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$; $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Si $A \cap B = \emptyset$, on dit que A et B sont *disjoints*.

• ***Produit cartésien de deux ensembles***
C'est l'ensemble des couples $(x, y), x \in E$ et $y \in F$. Il est noté $E \times F$.

• Relations binaires. $\mathcal{R}$ est dite

réflexive, si $\forall x \in E, x\mathcal{R}x$,

symétrique, si $\forall (x, y) \in E^2, x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$,

antisymétrique, si $\forall (x, y) \in E^2, (x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x) \Rightarrow x = y$,

transitive, si $\forall (x, y, z) \in E^3, (x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$,

$\mathcal{R}$ est une relation d'ordre si elle est réflexive, antisymétrique, transitive.

$\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence si elle est réflexive, symétrique, transitive.

On appelle ***classe d'équivalence*** de x pour la relation $\mathcal{R}$, l'ensemble des y de E tels que $x\mathcal{R}y$.

Les classes d'équivalence d'une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur E, sont non vides, deux à deux disjointes de réunion E.

On dit que x est congru à y modulo a dans $\mathbb{R}$ (on note $x \equiv y\ [a]$) s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - y = ka$.

On dit que x est congru à y modulo n dans $\mathbb{Z}$ (on note $x \equiv y\ [n]$) s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - y = kn$.

Applications

• Une application f de E dans F associe à tout élément x de E un unique élément y de F que l'on note $y = f(x)$.

• La restriction de f à $A \subset E$ est $f\big|_A : A \mapsto F, x \mapsto f(x)$.

• Si $A \subset E$, on note 1_A la fonction caractéristique de A. C'est l'application de E dans $\{0, 1\}$ définie par $1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \in \complement_E(A) \end{cases}$

• Image directe de $A \subset E$ est la partie $f(A) = \{f(x) \in F \mid x \in A\}$.

• Image réciproque de $B \subset F$ par f est $f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$ *i.e.* l'ensemble des antécédents des éléments de B.

• Si $f \in \mathcal{F}(E, F)$ et $g \in \mathcal{F}(F, G)$, on définit $g \circ f \in \mathcal{F}(E, G)$ par la formule

$$\forall x \in E, (g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big).$$

• $f \in \mathcal{F}(E,F)$ est ***injective*** si deux éléments distincts de E ont des images distinctes, ce qui s'écrit :

$$\forall (x,x') \in E^2, x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')\cdot$$

i.e. $\forall (x,x') \in E^2, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$.

• $f \in \mathcal{F}(E,F)$ est ***surjective*** si tout élément de F a au moins un antécédent par f *i.e.*

$$\big(\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)\big) \text{ i.e. } f(E) = F.$$

• $f \in \mathcal{F}(E,F)$ est ***bijective*** si elle est à la fois surjective et injective *i.e.* si

$$\forall y \in F, \exists! x \in E, y = f(x).$$

• La composée de deux applications injectives (*resp.* surjectives, *resp.* bijectives), est injective (*resp.* surjective, *resp.* bijective).
Dans ce dernier cas, $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Énoncés des exercices

1. Montrer $A \cup B = A \cap C \iff B \subset A \subset C$.

---

2. Montrer $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.

---

3. Montrer : $\begin{cases} A \cup B \subset A \cup C \\ A \cap B \subset A \cap C \end{cases} \Rightarrow B \subset C$.

---

4. Soient A et B des parties d'un ensemble E.
Montrer : $B \subset A \iff \forall X \in \mathcal{P}(E),\ (A \cap X) \cup B = A \cap (X \cup B)$.

---

5. Soient A et B des parties d'un ensemble E. On définit $f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$, $X \mapsto (X \cap A, X \cap B)$.

a. Donner une condition nécessaire et suffisante d'injectivité de f.

b. Idem avec la surjectivité.

---

6. Soit f une application de E dans lui-même.
Montrer que f est bijective si, et seulement si, pour toute partie A de E on a $f\big(\overline{A}\big) = \overline{f(A)}$ où $\overline{A}$ désigne le complémentaire de A dans E.

---

7. Soit f une bijection de $\mathbb{N}$ sur lui-même.

a. Si pour tout $n \in \mathbb{N},\ f(n) \leqslant n$ montrer $f = Id$.

b. Idem si l'on suppose $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) \geqslant n$.

c. On suppose enfin : $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) \neq n$. Prouver que $\big\{n \in \mathbb{N} \mid f(n) < n\big\}$ et $\big\{n \in \mathbb{N} \mid f(n) > n\big\}$ sont des parties infinies de $\mathbb{N}$.

8. Soit E un ensemble. Montrer que la relation $\mathcal{R}$ relation définie sur $\mathcal{P}(E)$ par :
$$A\mathcal{R}B \iff A = B \text{ ou } A = \overline{B}$$
est une relation d'équivalence.

---

9. Soit $\mathcal{R}$ la relation définie sur $\mathbb{R}$ par : $x\mathcal{R}y \iff xe^y = ye^x$.

a. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

b. Pour tout nombre réel x préciser le cardinal de la classe d'équivalence de x.

---

10. Montrer $\binom{n+1}{p+1} = \binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \cdots + \binom{n}{p}$ si $0 \leqslant p \leqslant n$

a. Par récurrence sur n.

b. En utilisant $\binom{k}{p} = \binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1}$.

c. Déterminer des nombres réels $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ tels que, pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$,
$$k^2 = \alpha\frac{k(k-1)}{2} + \beta k \text{ et } k^3 = \gamma\frac{k(k-1)(k-2)}{6} + \delta\frac{k(k-1)}{2} + \varepsilon k.$$
Retrouver alors $\sum\limits_{k=1}^{n} k$, $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2$ et $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3$.

---

11. Soient E un ensemble de cardinal n et $\mathcal{A}_n = \left\{f : E \to \mathbb{N} \mid \sum\limits_{x\in E} f(x) \leqslant p\right\}$ où p est un entier naturel fixé.

Montrer par récurrence sur n que $\mathcal{A}_n$ contient $\binom{n+p}{n}$ éléments.

---

12. Soit (Σ_2) $\begin{cases} x - my + m^2z = 2m \\ mx - m^2y + mz = 2m \\ mx + y - m^3z = 1-m \end{cases}$ où $m \in \mathbb{R}$.

À l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes et en discutant suivant les valeurs de m préciser, dans les cas où ce système admet des solutions, la nature géométrique de l'ensemble de ces solutions.

---

13. On considère le système (Σ_1) $\begin{cases} ax + by + z = \alpha \\ x + aby + z = \beta \\ x + by + az = \gamma \end{cases}$ où $(a, b, \alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^5$.

À l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes et en discutant suivant les valeurs de $(a, b, \alpha, \beta, \gamma)$ préciser, dans les cas où ce système admet des solutions, la nature géométrique de l'ensemble de ces solutions.

---

14. Soient f une application de E dans F et A_1, A_2 deux parties de E. Montrer que

a) $A_1 \subset A_2 \Rightarrow f(A_1) \subset f(A_2)$.

b) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.

c) $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$ avec égalité si f est injective.

d) $f(A_1) \setminus f(A_2) \subset f(A_1 \setminus A_2)$ avec égalité si f est injective.

15. Soient f une application de E dans F et B_1, B_2 deux parties de F. Montrer que
a) $B_1 \subset B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subset f(B_2)$.
b) $f^{-1}\big(B_1 \cup B_2\big) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.
c) $f^{-1}\big(B_1 \cap B_2\big) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.
d) $f^{-1}\big(B_1 \setminus B_2\big) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$

---

16. Soient f une application de E dans F et g une application de F dans G.
a) Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.
b) Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.

Solutions des exercices

1. Supposons $A \cup B = A \cap C$.
$B \subset A \cup B = A \cap C \subset A$ donc $B \subset A$.
De même $A \subset A \cup B = A \cap C \subset C$ d'où $A \subset C$.
Réciproquement si $B \subset A \subset C$ alors $A \cup B = A$ et $A \cap C = A$ d'où $A \cup B = A \cap C$.

---

2. Si $x \in (A \cup B) \setminus C$ alors ou bien $x \in A$ ou bien $x \in B$ mais, comme $x \notin C$, cela montre que ou bien $x \in A \setminus C$ ou bien $x \in B \setminus C$, ce qui prouve $(A \cup B) \setminus C \subset (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.
Réciproquement si $x \in (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$ alors x est soit dans A soit dans B donc dans $A \cup B$ mais $x \notin C$ donc $x \in (A \cup B) \setminus C$.
En définitive on a montré : $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.

---

3. Soit $x \in B$, distinguons deux cas :
• ou bien $x \in A$ et alors $x \in A \cap B \subset A \cap C \subset C$,
• ou bien $x \notin A$ donc $x \in (A \cup B) \setminus A \subset (A \cup C) \subset C$.
Dans tous les cas $x \in C$. On a effectivement montré $B \subset C$.

---

4. Supposons $B \subset A$. Soit $X \in \mathcal{P}(E)$.
$\big(A \cap X \subset A \text{ et } B \subset A\big) \Rightarrow (A \cap X) \cup B \subset A$
et aussi $A \cap X \subset X \Rightarrow (A \cap X) \cup B \subset X \cup B$, donc $(A \cap X) \cup B \subset A \cap (X \cup B)$.
D'autre part si $x \in A \cap (X \cup B)$ ou bien $x \in X$ et alors $x \in A \cap X$, ou bien $x \in B$.
En fin de compte $x \in (A \cap X) \cup B$. En résumé $(A \cap X) \cup B = A \cap (X \cup B)$.
Supposons $(A \cap X) \cup B = A \cap (X \cup B)$ pour tout $X \in \mathcal{P}(E)$.
En particulier lorsque $X = \varnothing$ cela donne $\varnothing \cup B = A \cap B \subset A$ d'où $B \subset A$.

---

5. a. $f(\varnothing) = (\varnothing, \varnothing) = f\Big(\complement_E(A \cup B)\Big)$ et donc une condition nécessaire d'injectivité est $A \cup B = E$.
Réciproquement si cette égalité est vérifiées et si $f(X) = f(Y)$,

Solutions

on a $X = X \cap (A \cup B) = (X \cap A) \cup (X \cap B) = (Y \cap A) \cup (Y \cap B) = Y$.
Une condition nécessaire et suffisante d'injectivité est donc $A \cup B = E$.

b. Si $f(X) = (A \cap B, \varnothing)$ alors $X \cap A = A \cap B$ d'où $X \cap A \cap B = A \cap B = \varnothing$ donc $A \cap B = \varnothing$ est une condition nécessaire de surjectivité.
Réciproquement si cette condition est remplie et si $(Y, Z) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$, en posant $X = Y \cup Z$ on a $X \cap A = (Y \cup Z) \cap A = (Y \cap A) \cup (Z \cap A) = Y$ car $Y \subset A$ et $Z \cap A \subset B \cap A = \varnothing$. De même $X \cap B = (Y \cap B) \cup (Z \cap B) = Z$, d'où$f(X) = (Y, Z)$, ce qui montre que f est surjective.
Par suite f est surjective si, et seulement si, $A \cap B = \varnothing$.

---

6. Supposons f bijective et soit $A \in \mathcal{P}(E)$.
Si $x \in \overline{A}$ et $y \in f(A)$ alors $f^{-1}(y) \in A$ donc $x \neq f^{-1}(y)$ et, par injectivité de f, $f(x) \neq y$, d'où $f(x) \in \overline{f(A)}$.
De même si $y \in \overline{f(A)}$ alors $f^{-1}(y) \in \overline{A}$ car, sinon $y = f\big(f^{-1}(y)\big) \in f(A)$, donc $y \in f\big(\overline{A}\big)$. En résumé $f\big(\overline{A}\big) = \overline{f(A)}$.

Supposons réciproquement que, pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, $f\big(\overline{A}\big) = \overline{f(A)}$.
Si $(x, y) \in E^2$ et $x \neq y$, si $A = \{x\}$ alors $y \in \overline{A}$, donc $f(y) \in f\big(\overline{A}\big) = \overline{f(A)} = \overline{\{f(x)\}}$ ce qui montre que $f(x) \neq f(y)$ et, donc, f est injective.
D'autre part $\overline{f(E)} = f\big(\overline{E}\big) = f(\varnothing) = \varnothing$ *i.e.* $f(E) = E$ et f est surjective.
En définitive f est bijective.

---

7. a. Procédons par récurrence.
On a $f(0) \leqslant 0$ par hypothèse d'où $f(0) = 0$.
Si l'on suppose l'existence de $n \in \mathbb{N}$ tel que $k \in [\![0, n]\!] \Rightarrow f(k) = k$ alors, par hypothèse, $f(n+1) \leqslant n+1$ et, comme $f(n+1) \notin \{f(0), f(1), \ldots, f(n)\}$ par injectivité de f, il vient $f(n+1) = n+1$.
Par théorème de récurrence $f = Id$.

b. Procédons de même.
Si k_0 est l'antécédent de 0 alors, par hypothèse, $0 = f(k_0) \geqslant k_0$, d'où $k_0 = 0$.
Si l'on suppose l'existence de $n \in \mathbb{N}$ tel que $k \in [\![0, n]\!] \Rightarrow f(k) = k$ alors, en notant k_{n+1} l'antécédent de $n+1$, on a $n+1 = f(k_{n+1}) \geqslant k_{n+1}$ et, comme $f(k_{n+1}) \notin \{f(0), f(1), \ldots, f(n)\}$, nécessairement $k_{n+1} \notin [\![0, n]\!]$, d'où $k_{n+1} = n+1$.
Par théorème de récurrence $f = Id$.

c. Soit $X = \big\{n \in \mathbb{N} \;\big|\; f(n) < n\big\}$, supposons que cet ensemble est fini.
La question b. et l'hypothèse $f \neq Id$ montrent que X est non vide. Soit p son maximum. Alors $n \geqslant p+1 \Rightarrow f(n) > n$ d'où $f([\![p+1, +\infty[\![\,) \subset [\![p+2, +\infty[\![\,$.
Comme f est surjective, nécessairement $[\![0, p+1]\!] \subset f([\![0, p]\!])$ qui est au plus de cardinal $p+1$: c'est impossible. Par suite X est infini.

De même soit $Y = \big\{n \in \mathbb{N} \;\big|\; f(n) > n\big\}$, alors $f(Y) = \big\{k \in \mathbb{N} \;\big|\; f^{-1}(k) < k\big\}$ car f est bijective. Comme pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{-1}(k) \neq k$, le début de la question montre que $f(Y)$ est infini et, donc, Y aussi.

---

8. Soient $(A, B, C) \in \big(\mathcal{P}(E)\big)^3$.
$A = A \Rightarrow A\mathcal{R}A$, $\mathcal{R}$ est réflexive.
$A\mathcal{R}B \Rightarrow \big(A = B \text{ ou } A = \overline{B}\big) \Rightarrow \big(B = A \text{ ou } B = \overline{A}\big) \Rightarrow B\mathcal{R}A$, $\mathcal{R}$ est symétrique.

Solutions

$\big(A\mathcal{R}B$ et $B\mathcal{R}C\big) \Rightarrow \big(A = B$ ou $A = \overline{B}\big)$ et $\big(B = C$ ou $B = \overline{C}\,\big)$
d'où $\big(A = C$ ou $A = \overline{C}\,\big)$ puis $A\mathcal{R}C$, $\mathcal{R}$ est transitive.
Par suite $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

---

9. a. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
$xe^x = xe^x \Rightarrow x\mathcal{R}x$.
$x\mathcal{R}y \Rightarrow xe^y = ye^x \Rightarrow ye^x = xe^y \Rightarrow y\mathcal{R}x$.
$\big(x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z\big) \Rightarrow xe^y = ye^x$ et $ye^z = ze^y \Rightarrow xe^{-x} = ye^{-y} = ze^{-z} \Rightarrow x\mathcal{R}z$, par suite $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

b. On vient de voir : $x\mathcal{R}y \iff f(x) = f(y)$ où l'on a posé $f : x \mapsto xe^{-x}$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (1 - x)e^{-x}$ d'où le tableau

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	1	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$1/e$	$\searrow$	0

Par suite f réalise une bijection de $]-\infty, 1]$ sur $]-\infty, 1/e]$ et aussi une bijection de $[1, +\infty[$ sur $]0, 1/e]$.
Si $x \leqslant 0$ ou $x = 1/e$ alors la classe de x est réduite à x, sinon elle contient deux éléments.

---

10. a. Notons $\mathcal{P}_n$ la propriété : $\forall p \in [\![0, n]\!]$, $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.

$\displaystyle\binom{0}{0} = 1 = \binom{1}{1}$ d'où $\mathcal{P}_0$.
Supposons $\mathcal{P}_n$ et soit $p \in [\![0, n]\!]$,
alors $\displaystyle\sum_{k=p}^{n+1} \binom{k}{p} = \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} + \binom{n+1}{p} = \binom{n+1}{p+1} + \binom{n+1}{p} = \binom{n+2}{p+1}$.
De plus si $p = n + 1$ alors $\displaystyle\binom{n+1}{p} = 1 = \binom{n+2}{p+1}$, d'où $\mathcal{P}_{n+1}$.

b. Tout d'abord $\displaystyle\binom{k}{p} + \binom{k}{p+1} = \binom{k+1}{p+1} \Rightarrow \binom{k}{p} = \binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1}$.
Posons $x_k = \displaystyle\binom{k}{p+1}$ si $p \leqslant k \leqslant n$, alors $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \sum_{k=p}^{n}(x_{k+1} - x_k) = x_{n+1} - x_p$
par télescopage, donc $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1} - \binom{p}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$.

c. $k(k-1) = k^2 - k$ donc $(\alpha, \beta) = (2, 1)$ convient.
De même $k(k-1)(k-2) = k^3 - 3k^2 + 2k$ d'où $k(k-1)(k-2) + 3k(k-1) = k^3 - k$ d'où $(\gamma, \delta, \varepsilon) = (6, 6, 1)$ convient.

$$S_1 = \sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{n} \binom{k}{1} = \binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$$S_2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \alpha \sum_{k=1}^{n} \binom{k}{2} + \beta \sum_{k=1}^{n} \binom{k}{1} = \alpha \binom{n+1}{3} + \beta \binom{n+1}{2}$$

soit $S_2 = 2\dfrac{(n+1)n(n-1)}{6} + \dfrac{(n+1)n}{2} = \dfrac{n(n+1)}{6}\big[2(n-1)+3\big] = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}\cdot$

$$\begin{aligned} S_3 &= \sum_{k=1}^{n} k^3 = 6\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{3} + 6\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{2} + \sum_{k=1}^{n}\binom{k}{1} \\ &= 6\binom{n+1}{4} + 6\binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2} \\ &= \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4} + (n+1)n(n-1) + \frac{(n+1)n}{2} \\ &= \frac{n(n+1)}{4}\big[(n-1)(n-2) + 4(n-1) + 2\big] = \frac{n(n+1)}{4}(n^2+n) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}\cdot \end{aligned}$$

---

11. $\mathcal{A}_0 = \mathbb{N}^{\varnothing}$ de cardinal $1 = \binom{p}{0}$.

Pour ceux que le cas $n = 0$ effraie on va traiter le cas $n = 1$: $\mathcal{A}_1$ est en bijection avec $[\![0, p]\!]$ de cardinal $p + 1 = \dbinom{p+1}{1}$.

Supposons que $\mathcal{A}_n$ est de cardinal $\dbinom{n+p}{n}$ et soit E de cardinal $n + 1$.

Fixons x_0 dans E, alors $E \setminus \{x_0\}$ est de cardinal n et $f \in \mathcal{A}_{n+1}$ si, et seulement si, il existe k dans $[\![0, p]\!]$ tel que $f(x_0) = k$ et $\sum\limits_{x\in E\setminus\{x_0\}} f(x) \leqslant p - k$.

Si l'on note $\mathcal{B}_k = \Big\{f : E\setminus\{x_0\} \to \mathbb{N} \mid \sum\limits_{x\in E\setminus\{x_0\}} f(x) \leqslant p-k\Big\}$ alors $(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_p)$ est une partition de $\mathcal{A}_{n+1}$ d'où $\operatorname{card}(\mathcal{A}_{n+1}) = \sum\limits_{k=0}^{p} \operatorname{card}(\mathcal{B}_k) = \sum\limits_{k=0}^{p} \dbinom{n+p-k}{n}$

soit $\operatorname{card}(\mathcal{A}_{n+1}) = \sum\limits_{\ell=n}^{n+p} \dbinom{\ell}{n} = \dbinom{n+p+1}{n+1}$ d'après l'exercice précédent.

Cela termine la récurrence.

---

12. On effectue $L_2 \leftarrow L_2 - mL_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - mL_1$ puis $L_2 \leftrightarrow L_3$ et on obtient le système équivalent $\left\{\begin{array}{rcl} x - my + m^2 z &=& 2m \\ (1+m^2)y - 2m^3 z &=& 1 - m - 2m^2 \\ m(1-m^2)z &=& 2m(1-m) \end{array}\right.$

- Si $m \in \{0, 1\}$ les deux premières lignes sont indépendantes et la troisième ligne est $0 = 0$, l'ensemble des solutions est donc une droite.
- Si $m = -1$ les deux premières lignes sont indépendantes et la troisième ligne est $0 = -4$, l'ensemble des solutions est vide.
- Sinon les trois lignes sont indépendantes, l'intersection des trois plans est réduite à un point.

---

13. Si $a = 1$ la condition de compatibilité est $\alpha = \beta = \gamma$ et on obtient le plan d'équation $x + by + z = \alpha$. Désormais $a \neq 1$.

Effectuons $L_1 \leftarrow L_1 - aL_3$ et $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$ puis $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$, on obtient le système équivalent $\left\{\begin{array}{rcl} (2-a-a^2)z &=& \alpha + \beta - (a+1)\gamma \\ b(a-1)y + (1-a)z &=& \beta - \gamma \\ x + by + az &=& \gamma \end{array}\right.$

Solutions