

Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème indépendants.

EXERCICE 1

On considère l'équation différentielle : $(E) \quad xy' + y = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$.

1. Résoudre (E) sur chacun des intervalles $] - 1, 0[$ et $]0, 1[$.
2. En déduire que (E) admet une unique solution sur $] - 1; 1[$.

EXERCICE 2

1. Justifier que la fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est intégrable sur \mathbb{R}_+ .

Dans la suite de cet exercice, on se propose de calculer : $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$

2. Soit f et g les fonctions définies sur \mathbb{R}_+ par :

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt \quad \text{et} \quad g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt.$$

(a) Démontrer que les fonctions f et g sont de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ et déterminer leur dérivée.

(b) Prouver que pour tout x réel positif on a : $f(x) = \int_0^1 x e^{-x^2 t^2} dt$.

En déduire que la fonction $\varphi = g + f^2$ est constante de valeur $\frac{\pi}{4}$.

(c) Démontrer que pour tout $x \geq 0$ réel on a : $0 \leq g(x) \leq e^{-x^2}$.

(d) En déduire la valeur de I .

PROBLÈME

THÉORÈME DU POINT FIXE ET APPLICATIONS

Le but de ce problème est de démontrer le théorème du point fixe de PICARD, ce qui fait l'objet de la partie I, et d'en voir plusieurs applications élémentaires dans les parties suivantes. Les parties II, III et IV sont indépendantes entre elles.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

Une définition. Soit $k \in [0, 1[$. On dira qu'une application $f : E \rightarrow E$ est une contraction stricte de rapport k lorsque pour tout $(x, y) \in E^2$, on a : $\|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|$.

Une notation. Pour n entier naturel et $f : E \rightarrow E$, on notera $f^n : E \rightarrow E$ l'application définie par : $f^n(x) = f \circ f^{n-1}(x)$ pour $n \geq 1$ avec la convention $f^0 = Id$.

PARTIE I : Le théorème du point fixe de PICARD

Dans cette partie $(E, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach et $f : E \rightarrow E$ est une contraction stricte de rapport k .

Pour $a \in E$ on considère la suite (x_n) définie par $x_0 = a$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout n entier naturel.

1. Pour tout n entier naturel, on pose $u_n = x_{n+1} - x_n$.

(a) Démontrer que pour tout n entier naturel, on a $\|u_{n+1}\| \leq k\|u_n\|$ puis que $\|u_n\| \leq k^n\|f(a) - a\|$.

En déduire que la série $\sum u_n$ converge.

(b) Démontrer alors que la suite (x_n) converge vers un vecteur ℓ de E .

(c) Prouver que ℓ est un point fixe de f c'est-à-dire que $f(\ell) = \ell$.

(d) Démontrer que f admet en fait un unique point fixe.

On vient donc de démontrer le résultat suivant :

THÉORÈME DU POINT FIXE DE PICARD. Dans un espace de Banach $(E, \|\cdot\|)$ une application $f : E \rightarrow E$ qui est une contraction stricte admet un unique point fixe et pour tout a dans E la suite des itérés $(f^n(a))$ converge vers ce point fixe.

PARTIE II : Exemples et contre-exemples

2. Sur la nécessité d'avoir une contraction stricte

On considère ici la fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$g(t) = t + \frac{\pi}{2} - \arctan(t).$$

(a) Démontrer que pour tout t réel, on a $|g'(t)| < 1$. En déduire que l'on a pour x et y réels distincts, $|g(x) - g(y)| < |x - y|$.

(b) La fonction g admet-elle un point fixe ? Est-elle une contraction stricte ?

3. Un exemple

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que, pour tout x réel, on ait $f(x) = f \circ g(x)$ où $g(x) = \frac{x}{5} + 1$.

(a) On considère la suite (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{5} + 1$ pour tout n entier naturel. Démontrer en utilisant le théorème de PICARD que cette suite converge vers un réel ℓ que l'on précisera.

(b) Démontrer que pour tout n entier naturel et tout x réel, on a : $f(g^n(x)) = f(x)$.

(c) En déduire que f est constante.

4. Un système non linéaire dans \mathbb{R}^2

On s'intéresse au système : $(S) \begin{cases} 4x = \sin(x + y) \\ 3y = 3 + 2 \arctan(x - y) \end{cases}$

On munit \mathbb{R}^2 de la norme définie par : $\|(x, y)\|_1 = |x| + |y|$ et on considère l'application $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par :

$$\psi(x, y) = \left(\frac{1}{4} \sin(x + y), 1 + \frac{2}{3} \arctan(x - y) \right).$$

(a) Pourquoi l'espace vectoriel normé $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$ est-il complet ?

(b) Démontrer que pour tout a et b réels, on a :

$$|\sin(b) - \sin(a)| \leq |b - a| \quad \text{et} \quad |\arctan(b) - \arctan(a)| \leq |b - a|.$$

(c) Prouver que ψ est une contraction stricte de $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$ dans $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$.

(d) En déduire que le système (S) admet une unique solution dans \mathbb{R}^2 .

(e) Ici \mathbb{R}^2 est muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par $\|(x, y)\|_\infty = \max(|x|, |y|)$ qui en fait un espace de Banach.

Déterminer $\left\| \psi\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) - \psi(0, 0) \right\|_\infty$. L'application ψ est-elle encore une contraction stricte pour la norme $\|\cdot\|_\infty$? Quel commentaire peut-on faire ?

PARTIE III : Une équation intégrale

5. Soit F l'espace vectoriel des applications bornées de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} . Pour f dans F on pose $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$.

On note aussi E l'espace vectoriel des applications continues de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} .

(a) Démontrer soigneusement que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur F . On admettra pour la suite que $(F, \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.

(b) Vérifier que $E \subset F$.

(c) Démontrer le résultat suivant du cours. Si $(G, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé et si (g_n) est une suite d'applications continues de G dans G qui converge uniformément sur G vers une application g alors g est continue.

(d) En déduire que $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est aussi un espace de Banach.

6. On considère une application continue $K : [0; 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ainsi que $g \in E$. Pour λ réel, on note Φ l'application qui à une fonction f de E associe la fonction définie par : $\Phi(f)(x) = g(x) - \lambda \int_0^1 K(x, y)f(y)dy$ pour tout x dans $[0, 1]$.

(a) Justifier que l'application $|K|$ est bornée et atteint ses bornes.

On pose $M = \max_{(x,y) \in [0,1]^2} |K(x, y)|$.

(b) Démontrer que $\Phi(f)$ est un élément de E .

(c) On suppose que $|\lambda| < M^{-1}$. Vérifier que Φ est une contraction stricte de $(E, \|\cdot\|_\infty)$ et en déduire qu'il existe une unique application f dans E telle que : $g(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 K(x, y)f(y)dy$ pour tout x dans $[0, 1]$.

PARTIE IV : Une application géométrique

7. Dans le plan rapporté à un repère orthonormal on considère un vrai triangle ABC avec B et C sur l'axe des abscisses. Soit M un point de l'axe des abscisses. On note :

- P_M le projeté orthogonal de M sur (CA) ;
- Q_M le projeté orthogonal de P_M sur (AB) ;
- R_M le projeté orthogonal de Q_M sur (BC) .

On obtient donc une application $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui à l'abscisse de M associe l'abscisse de R_M . On appelle a, b et c les mesures respectives des angles $\widehat{BAC}, \widehat{ABC}$ et \widehat{BCA} .

(a) Pour M et M' points distincts de (BC) , justifier l'égalité (lorsque $M \neq C$) $\frac{P_M P_{M'}}{MM'} = \frac{P_M C}{MC} = |\cos(c)|$.

(b) Démontrer que φ est une contraction stricte de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Que peut-on en déduire ?

Solution

EXERCICE 1

1. (E) est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients fonctions continues sur les intervalles $] - 1, 0[$ et $]0, 1[$.

$$(E) \iff \frac{d}{dx}(xy(x)) = \frac{d}{dx}(\arcsin(x^2)).$$

Il existe donc deux nombres réels C_1 et C_2 tels que :

$$\forall x \in] - 1, 0[, y(x) = \frac{C_1 + \arcsin(x^2)}{x},$$

$$\forall x \in]0, 1[, y(x) = \frac{C_2 + \arcsin(x^2)}{x}.$$

2. Procédons par analyse-synthèse.

• Si (E) a une solution f sur $] - 1, 1[$ alors, d'après 1.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{C_1 + \arcsin(x^2)}{x} & \text{si } x \in] - 1, 0[\\ \frac{C_2 + \arcsin(x^2)}{x} & \text{si } x \in]0, 1[\\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Si $C_1 \neq 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} |f(x)| = +\infty$; si $C_2 \neq 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} |f(x)| = +\infty$.

Donc, nécessairement $C_1 = C_2 = 0$ et (E) a une unique solution.

• Soit f définie par $f(x) = \begin{cases} \frac{\arcsin(x^2)}{x} & \text{si } x \in] - 1, 1[\setminus\{0\} \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

La fonction f ainsi définie est de classe \mathcal{C}^1 sur $] - 1, 1[\setminus\{0\}$ d'après des théorèmes généraux. Elle est solution de (E) sur $] - 1, 0[$ et sur $]0, 1[$.

Comme $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$, on a $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$ et f est continue en 0. D'où la continuité de f sur $] - 1, 1[$.

On a aussi $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + o(x)$ i.e. f a un développement limité à l'ordre 1 en 0. Elle est donc dérivable en 0 et $f'(0) = 1$. On peut donc conclure que f est solution de (E) sur $] - 1, 1[$.

Il résulte de ce raisonnement que (E) a une unique solution sur $] - 1, 1[$ qui est cette fonction f .

EXERCICE 2

1. La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur \mathbb{R}_+ et négligeable devant $t \mapsto t^{-2}$ au voisinage de $+\infty$, par croissances comparées. Comme cette dernière fonction est intégrable sur $[1, +\infty[$, la fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est intégrable sur \mathbb{R}_+

2. (a) En tant que primitive de la fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ continue sur \mathbb{R}_+ , la fonction f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ et $f'(x) = e^{-x^2}$.

La fonction $F : (x, t) \mapsto \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{R}_+ \times [0, 1]$ par théorèmes généraux et $\frac{\partial F}{\partial x}(x, t) = -2xe^{-x^2(1+t^2)}$.

Pour tout $(x, t) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 1]$, $\left| \frac{\partial F}{\partial x}(x, t) \right| \leq 2$. La fonction constante $t \mapsto 2$ étant intégrable sur le segment $[0, 1]$, toutes les hypothèses du théorème de dérivation sous le signe somme sont vérifiées. On peut conclure que g est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ et $g'(x) = \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial x}(x, t) dt = \int_0^1 -2xe^{-x^2(1+t^2)} dt$.

(b) Si $x > 0$, le changement de variable linéaire $t = xu$ donne $f(x) = \int_0^1 xe^{-u^2x^2} du$. Cette égalité étant vraie aussi si $x = 0$, le résultat est prouvé. Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $g'(x) = -2e^{-x^2} \int_0^1 xe^{-t^2x^2} dt = -2f'(x)f(x)$ et par suite $\varphi'(x) = 0$. Donc : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\varphi(x) = \varphi(0) = g(0) = \frac{\pi}{4}$

car $g(0) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \left[\arctan(t) \right]_0^1 = \frac{\pi}{4}$.

(c) $\forall (x, t) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 1]$, $0 < F(x, t) = e^{-x^2} \frac{e^{-t^2x^2}}{1+t^2} \leq e^{-x^2}$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $0 \leq g(x) \leq \int_0^1 e^{-x^2} dt = e^{-x^2}$.

(d) Par encadrement, il découle de (c) que $\lim_{+\infty} g = 0$. Comme $\lim_{+\infty} f = I$, par passage à la limite dans l'égalité $\frac{\pi}{4} = g + f^2$ on obtient $I^2 = \frac{\pi}{4}$.

Comme $t \mapsto e^{-t^2}$ est positive, $I \geq 0$, d'où $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

PROBLÈME

Partie I

1. (a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|f(x_{n+1}) - f(x_n)\| \leq k\|x_{n+1} - x_n\|$ i.e. $\|u_{n+1}\| \leq k\|u_n\|$.

Par récurrence, on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|u_n\| \leq k^n\|u_0\| = k^n\|f(a) - a\|$.

De la convergence de la série géométrique $\sum k^n$, puisque $k \in [0, 1[$, on déduit celle de la série à termes positifs $\sum \|u_n\|$. L'espace $(E, \|\cdot\|)$ étant de Banach, la convergence absolue implique la convergence. La série $\sum u_n$ converge.

(b) D'après le critère de convergence suites/séries, la convergence de la série $\sum(x_{n+1} - x_n)$ équivaut à la convergence de la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ vers $\ell \in E$.

(c) La fonction étant une contraction stricte, elle est lipschitzienne et donc continue sur E . Donc $\lim(f(x_n)) = f(\ell)$ et comme $x_{n+1} = f(x_n)$, par unicité de la limite, $\ell = f(\ell)$.

(d) Si f a un autre point fixe ℓ' , alors $\|f(\ell) - f(\ell')\| \leq k\|\ell - \ell'\|$. Donc $(1 - k)\|\ell - \ell'\| \leq 0$. Comme $(1 - k) > 0$, il s'ensuit que $\|\ell - \ell'\| = 0$ i.e. $\ell = \ell'$. La fonction f a donc un point fixe unique.

Partie II

2. (a) g est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et $g'(t) = 1 - \frac{1}{1+t^2} = \frac{t^2}{1+t^2} \in]0, 1[$.

Donc : $\forall t \in \mathbb{R}, |g'(t)| < 1$.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \neq y$, on déduit de l'inégalité des accroissements finis que

$$|g(x) - g(y)| < |x - y|.$$

(b) Comme, pour tout $t \in \mathbb{R}, \arctan(t) < \frac{\pi}{2}$, on a : $\forall t \in \mathbb{R}, g(t) > t$.

La fonction g n'a pas de point fixe. Elle n'est pas une contraction stricte car sinon, comme les autres hypothèses du théorème de Picard sont vérifiées, elle aurait un point fixe.

3. (a) $u_{n+1} = g(u_n)$ et $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |g(x) - g(y)| = \frac{1}{5}|x - y|$.

La fonction g est donc une contraction stricte. D'après le théorème de Picard, la suite (u_n) converge vers $\ell = g(\ell)$ i.e. $\ell = \frac{5}{4}$.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}, f(u_n) = f(g(u_n)) = f(u_{n+1})$. La suite $(f(u_n))_{n \geq 0}$ est donc constante. Pour $u_0 = x, u_n = g^n(x)$. Donc $f(g^n(x)) = f(x)$.

(c) Comme f est continue sur \mathbb{R} , par passage à la limite quand $n \rightarrow \infty$ et x fixé, dans l'égalité précédente, on obtient $f(\ell) = f(x)$.

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) = f(\ell)$ i.e. f est constante.

4. (a) Comme \mathbb{R}^2 est un espace vectoriel de dimension finie, l'espace vectoriel normé $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$ est un espace de Banach.

(b) Les fonction \sin et \arctan sont de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et l'on a d'une part, $|\sin'| = |\cos| \leq 1$, d'autre part, pour tout $x \in \mathbb{R}, \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} \in]0, 1[$. L'inégalité des accroissements finis implique, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$|\sin(a) - \sin(b)| \leq |a - b| \text{ et } |\arctan(a) - \arctan(b)| \leq |a - b|.$$

(c) $\psi(x, y) - \psi(x', y') = (\alpha, \beta)$ où

$$(\alpha, \beta) = \left(\frac{1}{4}(\sin(x+y) - \sin(x'+y')), \frac{2}{3}(\arctan(x-y) - \arctan(x'-y')) \right).$$

$|\alpha| + |\beta| \leq \frac{1}{4}|x + y - x' - y'| + \frac{2}{3}|x - y - x' + y'|$ d'après (b).

Donc $|\alpha| + |\beta| \leq \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3}\right)(|x - x'| + |y - y'|)$ par inégalité triangulaire dans \mathbb{R} .

Donc $\|(\alpha, \beta)\|_1 \leq \frac{11}{12}\|(x, y) - (x', y')\|_1$.

L'application ψ est une contraction stricte de $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$ dans $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$.

(d) Les hypothèses du théorème de Picard étant toutes vérifiées, ψ a un point fixe unique. Comme $(S) \iff (\psi(x, y) = (x, y))$, le système a une unique solution.

$$(e) \psi\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) - \psi(0, 0) = \left(0, \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \left\| \psi\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) - \psi(0, 0) \right\|_{\infty} = \frac{\pi}{6}.$$

$\left\| \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) - (0, 0) \right\|_{\infty} = \frac{1}{2}$. Si ψ était une contraction stricte de $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{\infty})$ dans $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{\infty})$ il existerait $k \in [0, 1[$ tel que $\frac{\pi}{6} \leq k \frac{1}{2}$ ce qui implique $k \geq \frac{\pi}{3} > 1$ ce qui est absurde. Donc ψ n'est pas une contraction stricte de $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{\infty})$ dans $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{\infty})$. Le théorème de Picard n'est pas applicable et pourtant ψ a un point fixe dans \mathbb{R}^2 .

Partie III

5. (a) L'application $\|\cdot\|_{\infty}$ est clairement à valeurs dans \mathbb{R}_+ et, si $\|f\|_{\infty} = 0$, alors pour tout $x \in [0, 1]$, $0 \leq |f(x)| \leq \|f\|_{\infty} = 0$ i.e. f est nulle.

Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in F$, on a : $\forall x \in [0, 1]$, $|\lambda f(x)| = |\lambda| |f(x)| \leq |\lambda| \|f\|_{\infty}$.

Donc : $\|\lambda f\|_{\infty} = \sup_{x \in [0, 1]} |\lambda f(x)| \leq |\lambda| \|f\|_{\infty}$.

Si $\lambda \neq 0$, $\left\| \frac{1}{\lambda}(\lambda f) \right\|_{\infty} = \|f\|_{\infty} \leq \frac{1}{|\lambda|} \|\lambda f\|_{\infty} \Rightarrow \|\lambda f\|_{\infty} \geq |\lambda| \|f\|_{\infty}$.

Donc, pour $\lambda \neq 0$, on a $\|\lambda f\|_{\infty} = |\lambda| \|f\|_{\infty}$, égalité encore vraie si $\lambda = 0$.

Enfin, si f et g sont dans F , $\forall x \in [0, 1]$, $|(f + g)(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$

D'où $\forall x \in [0, 1]$, $|(f + g)(x)| \leq \|f\|_{\infty} + \|g\|_{\infty}$.

Comme $\|f\|_{\infty} + \|g\|_{\infty}$ majore l'ensemble $\{|(f + g)(x)| \mid x \in [0, 1]\}$ on déduit de la définition de la borne supérieure $\|f + g\|_{\infty} \leq \|f\|_{\infty} + \|g\|_{\infty}$.

L'application $F \rightarrow \mathbb{R}_+$, $f \mapsto \|f\|_{\infty}$ est une norme sur F .

(b) Si $f \in E$, elle est continue sur le segment $[0, 1]$ de \mathbb{R} ; elle est donc bornée sur $[0, 1]$ et atteint ses bornes. D'où $f \in F$. Donc $E \subset F$.

(c) Il suffit de prouver que g est continue en tout point a de G . Soit $a \in G$. $\forall x \in G, \forall n \in \mathbb{N}, \|g(x) - g(a)\| \leq \|g(x) - g_n(x)\| + \|g_n(x) - g_n(a)\| + \|g_n(a) - g(a)\|$
Comme (g_n) converge uniformément sur G vers g , soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, soit $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0(\varepsilon), \forall t \in G, \|g_n(t) - g(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$.