L'objet de ce problème est de donner une approximation de la somme des séries de Riemann convergentes $S(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ où α est un réel strictement supérieur à 1. Pour cela, on étudie le reste $R_n(\alpha) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}\cdot$
Dans la première partie, on donne une première approximation du reste. Cette méthode se généralisant mal, on utilise dans la deuxième partie une formule de Taylor pour obtenir simplement un développement asymptotique du reste. L'inconvénient de cette méthode est qu'elle ne donne aucun contrôle de l'erreur. Dans la troisième partie, on retrouve à partir de la formule sommatoire d'Euler-Maclaurin le même développement asymptotique avec une expression de l'erreur assez satisfaisante. On a besoin dans cette partie d'une étude succincte des polynômes de Bernoulli. Dans la dernière partie, on étudie de manière assez précise le contrôle de cette erreur, pour conclure que les formules sommatoires étudiées ne sont pas nécessairement convergentes.

Rappels et notations

On note $[x]$ la partie entière d'un réel x.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On note $v_n = O(u_n)$ si

$$\exists M \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \Rightarrow |v_n| \leqslant M|u_n|.$$

I Étude préliminaire

I.A – Convergence des séries de Riemann

I.A.1) Soit f une fonction réelle, définie continue et décroissante sur $[a, +\infty[$, où $a \in \mathbb{R}$. Montrer, que pour tout entier $k \in [a+1, +\infty[$, on a

$$\int_k^{k+1} f(x)dx \leqslant f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(x)dx.$$

I.A.2) En déduire la nature de la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ selon la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$. En cas de convergence, on pose $S(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}\cdot$

I.A.3) Pour tout réel $\alpha > 1$, montrer que $1 \leqslant S(\alpha) \leqslant 1 + \dfrac{1}{\alpha - 1}\cdot$

I.B – Première étude asymptotique du reste

Dans la suite du problème, pour tout réel α strictement supérieur à 1 et pour tout entier naturel non nul n, on pose $R_n(\alpha) = \displaystyle\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}\cdot$

I.B.1) En utilisant l'encadrement de la question I.A.1, montrer que
$$R_n(\alpha) = \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} + O\Big(\frac{1}{n^\alpha}\Big)\cdot$$

I.B.2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ par $f(x) = \dfrac{1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}}\cdot$ En appliquant à f la formule de Taylor avec reste intégrale à l'ordre 2, montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, $f(k+1) - f(k) = \dfrac{1}{k^\alpha} - \dfrac{\alpha}{2}\dfrac{1}{k^{\alpha+1}} + A_k$ où A_k est un réel vérifiant $0 \leqslant A_k \leqslant \dfrac{\alpha(\alpha+1)}{2k^{\alpha+2}}\cdot$

I.B.3) En déduire que $R_n(\alpha) = \dfrac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} + \dfrac{1}{2n^\alpha} + O\Big(\dfrac{1}{n^{\alpha+1}}\Big)\cdot$

On pourrait répéter le procédé pour obtenir un développement asymptotique plus précis de $R_n(\alpha)$, mais la partie suivante va donner une méthode plus rapide.

II Formule de Taylor et nombres de Bernoulli

II.A – Nombres de Bernoulli

II.A.1) Montrer qu'il existe une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ayant la propriété suivante : pour tout entier $p \in \mathbb{N}^\star$ pour tout intervalle non réduit à un point I et pour toute fonction complexe f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I, la fonction g définie sur I par $g = a_0 f + a_1 f' + \cdots + a_{p-1}f^{(p-1)}$ vérifie
$$g' + \frac{1}{2!}g'' + \frac{1}{3!}g^{(3)} + \cdots \frac{1}{p!}g^{(p)} = f' + \sum_{\ell=1}^{p-1} b_{\ell,p} f^{p+\ell}$$
où les $b_{\ell,p}$ sont des coefficients indépendants de f que l'on ne cherchera pas à calculer.

II.A.2) Montrer que $a_0 = 1$ et que pour tout $p \geqslant 1$, $a_p = -\displaystyle\sum_{i=2}^{p+1} \frac{a_{p+1-i}}{i!}\cdot$
En déduire que $|a_p| \leqslant 1$ pour tout entier naturel p. Déterminer a_1 et a_2.

II.A.3) a) Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, justifier que la série $\sum a_p z^p$ est convergente. On note $\varphi(z)$ sa somme : $\varphi(z) = \displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} a_p z^p$.

b) Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, calculer le produit $(e^z - 1)\varphi(z)$.

En déduire que, pour tout $z \in \mathbb{C}^\star$ vérifiant $|z| < 1$, on a $\varphi(z) = \dfrac{z}{e^z - 1}\cdot$

c) Montrer que $a_{2k+1} = 0$ pour tout entier $k \geqslant 1$. Calculer a_4.

Les nombres $b_n = n! a_n$ sont appelés nombres de Bernoulli.

II.B** – **Formule de Taylor

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ par $f(x) = \dfrac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}$, où α est un réel strictement supérieur à 1. Dans cette question II.B, on fixe un entier naturel non nul p et on note $g = a_0 f + a_1 f' + \cdots + a_{2p-1} f^{(2p-1)}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, on pose $R(k) = g(k+1) - g(k) - f'(k)$ de sorte que $g(k+1) - g(k) = f'(k) + R(k)$.

II.B.1) En appliquant à g la formule de Taylor avec reste intégrale à l'ordre $2p$, montrer qu'il existe un réel A tel que, pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$,

$$|R(k)| \leqslant A k^{-(2p+\alpha)}.$$

II.B.2) En déduire le développement asymptotique du reste

$$R_n(\alpha) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$$

$$R_n(\alpha) = -\Big(a_0 f(n) + a_1 f'(n) + \cdots + a_{2p-2} f^{(2p-2)}(n)\Big) + O\Big(\frac{1}{n^{2p+\alpha-1}}\Big)$$

On obtient ainsi une valeur approchée de $S(\alpha)$, donnée par

$$\widetilde{S}_{n,2p-2}(\alpha) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^\alpha} - \Big(a_0 f(n) + a_1 f'(n) + \cdots + a_{2p-2} f^{(2p-2)}(n)\Big)$$

II.B.3) Donner le développement asymptotique de $R_n(3)$ correspondant au cas $\alpha = 3$ et $p = 3$.

III Polynômes de Bernoulli et formule sommatoire d'Euler-Maclaurin

On peut calculer, pour $n = 100, \widetilde{S}_{100,4}(3) = 1,202056903159594277\ldots$ tandis que $S(3)$ vaut $1,202056903159594285\ldots$ (constante d'Apéry). La méthode de la partie II semble satisfaisante, mais ne fournit pas d'information précise sur le terme $O\Big(\dfrac{1}{n^{2p+\alpha-1}}\Big)\cdot$ C'est pourquoi on introduit dans cette partie les polynômes de Bernoulli et la formule sommatoire d'Euler-Maclaurin.

III.A** – **Polynômes de Bernoulli

On définit une suite de polynômes $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} = (A_n(X))_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant les conditions suivantes

$$A_0 = 1,\ A'_{n+1} = A_n \text{ et } \int_0^1 A_{n+1}(t)dt = 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Les polynômes $B_n = n!A_n$ sont appelés polynômes de Bernoulli.

III.A.1) Propriétés élémentaires

a) Montrer que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est déterminée de façon unique par les conditions III.1 ; préciser le degré de A_n ; calculer A_1, A_2 et A_3.

b) Montrer que $A_n(t) = (-1)^n A_n(1-t)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \mathbb{R}$.

c) Pour tout entier $n \geqslant 2$, montrer que $A_n(0) = A_n(1)$ et que $A_{2n-1}(0) = 0$.

d) On pose provisoirement $c_n = A_n(0)$ pour tout entier naturel n. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n(X) = c_0\dfrac{X^n}{n!} + \cdots + c_{n-2}\dfrac{X^2}{2!} + c_{n-1}X + c_n$ puis que, si $n \geqslant 1$, $\dfrac{c_0}{(n+1)!} + \cdots + \dfrac{c_{n-2}}{2!} + \dfrac{c_{n-1}}{1!} + c_n = 0$.

e) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a en fait $c_n = a_n$.

III.A.2) Fonction génératrice

a) Montrer que la série $\sum A_n(t)z^n$ converge pour tout réel $t \in [-1,1]$ et tout complexe z vérifiant $|z| < 1$. Sous ces conditions, on pose

$$f(t,z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(t)z^n.$$

b) Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$. Montrer que la fonction $t \mapsto f(t,z)$ est dérivable sur $[0,1]$ et exprimer sa dérivée en fonction de $f(t,z)$. En déduire que, si $|z| < 1$ et $z \neq 0$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} A_n(t)z^n = \frac{ze^{tz}}{e^z - 1}\cdot$

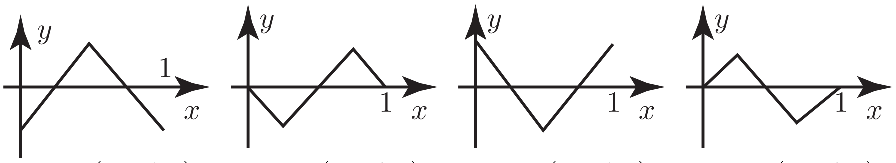
c) Montrer que, si $z \in \mathbb{C}$ et $|z| < 2\pi$, on a $\dfrac{ze^{z/2}}{e^z-1} + \dfrac{z}{e^z-1} = 2\dfrac{z/2}{e^{z/2}-1}\cdot$

En déduire, pour tout entier naturel n, $A_n\left(\dfrac{1}{2}\right) = \left(\dfrac{1}{2^{n-1}} - 1\right)a_n$.

III.A.3) Variations des polynômes de Bernoulli

On établit ici une majoration des polynômes de Bernoulli sur $[0,1]$.

a) Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, les variations des polynômes A_n sur $[0,1]$ correspondent schématiquement aux quatre cas ci-dessous :



$n \equiv 0 (\text{mod } 4)$ $n \equiv 1 (\text{mod } 4)$ $n \equiv 2 (\text{mod } 4)$ $n \equiv 3 (\text{mod } 4)$

En d'autres termes, pour $n \geqslant 2$, on a :

1. Si $n \equiv 2 \bmod 4$, alors $A_n(0) = A_n(1) > 0 > A_n\left(\frac{1}{2}\right)$; de plus, la fonction A_n est strictement décroissante sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

2. Si $n \equiv 0 \bmod 4$, alors $A_n(0) = A_n(1) < 0 < A_n\left(\frac{1}{2}\right)$; de plus, la fonction A_n est strictement croissante sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

3. Si $n \equiv 1 \bmod 4$, alors $A_n(0) = A_n\left(\frac{1}{2}\right) = A_n(1) = 0$; de plus, $A_n < 0$ sur $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ et $A_n > 0$ sur $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$.

4. Si $n \equiv 3 \bmod 4$, alors $A_n(0) = A_n\left(\frac{1}{2}\right) = A_n(1) = 0$; de plus, $A_n > 0$ sur $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ et $A_n < 0$ sur $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et tout $x \in [0,1]$ montrer que $|A_{2n}(x)| \leqslant |a_{2n}|$ et $|A_{2n+1}(x)| \leqslant \dfrac{|a_{2n}|}{2}$.

III.B – Formule sommatoire d'Euler-Maclaurin

III.B.1) Soit f une fonction complexe de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]$.

a) Montrer que pour tout entier $q \geqslant 1$

$$f(1) - f(0) = \sum_{j=1}^{q} (-1)^{j+1} \Big[A_j(t) f^{(j)}(t)\Big]_0^1 + (-1)^q \int_0^1 A_q(t) f^{(q+1)}(t)\,dt$$

b) En tenant compte des relations trouvées dans la partie précédente, montrer que pour tout entier naturel impair $q = 2p+1$,

$$f(1) - f(0) = \frac{1}{2}\big(f'(0) + f'(1)\big) - \sum_{j=1}^{p} a_{2j}\big(f^{(2j)}(1) - f^{(2j)}(0)\big) - \int_0^1 A_{2p+1}(t) f^{(2p+2)}(t)\,dt$$

III.B.2) Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit f une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[n, +\infty[$. On suppose que f et toutes ses dérivées sont de signe constant sur $[n, +\infty[$ et tendent vers 0 en $+\infty$.

En appliquant, pour $k \geqslant n$, le résultat précédent à $f_k(t) = f(k+t)$, montrer

$$\sum_{k=n}^{\infty} f'(k) = -f(n) + \frac{1}{2}f'(n) - \sum_{j=1}^{p} a_{2j} f^{(2j)}(n) + \int_n^{+\infty} A^*_{2p+1} f^{(2p+2)}$$

où l'on a posé $A^*_j(t) = A_j(t - [t])$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Montrer que $\left| \displaystyle\int_n^{+\infty} A^*_{2p+1}(t) f^{(2p+2)}(t)dt \right| \leqslant \left| \dfrac{a_{2p}}{2} \right| \left| f^{(2p+1)}(n) \right|$.

III.B.3) Montrer que, dans l'expression de $R_n(\alpha)$ du II.B.2, le terme $O\left(\dfrac{1}{n^{2p+\alpha}}\right)$ peut s'écrire sous forme d'une intégrale.

IV Compléments sur l'erreur

Dans cette partie, on fixe un réel $\alpha > 1$ et on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ par $f(x) = \dfrac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}$.

IV.A – Encadrement de l'erreur

IV.A.1) Soit g une fonction continue par morceaux croissante sur $[0, 1]$. En remarquant $\displaystyle\int_0^1 = \int_0^{1/2} + \int_{1/2}^1$ montrer que

- si $n \equiv 1 \bmod 4$, alors $\displaystyle\int_0^1 A_n(t)g(t)dt \geqslant 0$;

- si $n \equiv 3 \bmod 4$, alors $\displaystyle\int_0^1 A_n(t)g(t)dt \leqslant 0$.

IV.A.2) En reprenant les notations de II.B.2, montrer que pour tout entier $p \geqslant 1$,

$\widetilde{S}_{n,4p}(\alpha) \leqslant S(\alpha) \leqslant \widetilde{S}_{n,4p+2}(\alpha)$ et que $\widetilde{S}_{n,4p}(\alpha) \leqslant S(\alpha) \leqslant \widetilde{S}_{n,4p-2}(\alpha)$.

En déduire que l'erreur $\left|S(\alpha) - \widetilde{S}_{n,4p}(\alpha)\right|$ est majorée par $\left|a_{2p+2} f^{(2p+2)}(n)\right|$.

IV.A.3) Dans cette question, on reprend le cas de II.B.3. Sachant que $6!a_6 = \dfrac{1}{42}$, retrouver que l'erreur $\left|S(3) - \widetilde{S}_{100,4}(3)\right|$ est majorée par une expression de l'ordre de 10^{-17}.

IV.B – Séries de Fourier

Pour tout entier $p \geqslant 1$ et tout réel x, on pose $\widetilde{A}_p(x) = A_p\left(\dfrac{x}{2\pi} - \left[\dfrac{x}{2\pi}\right]\right)$.

IV.B.1) Montrer que $\widetilde{A}_p$ est 2π-périodique et continue par morceaux.

IV.B.2) À l'aide de la question III.B.1, déterminer les coefficients de Fourier de $\widetilde{A}_p$: $\widehat{A}_p(n) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \widetilde{A}_p(t) e^{-inx} dx$.

IV.B.3) Étudier la convergence de la série de Fourier de $\widetilde{A}_p$:

IV.B.4) Pour $p \in \mathbb{N}^\star$, en déduire que $a_{2p} = A_{2p}(0) = \dfrac{(-1)^{p+1} S(2p)}{2^{2p-1}\pi^{2p}}\cdot$

IV.C – Comportement de l'erreur

IV.C.1) Montrer que, pour tous entiers $n, p \geqslant 1$

$$\left|\frac{a_{2p+2} f^{(2p+2)}(n)}{a_{2p} f^{(2p)}(n)}\right| = \frac{(\alpha+2p)(\alpha+2p-1)S(2p+2)}{4n^2\pi^2 S(2p)}\cdot$$

IV.C.2) Que dire de l'approximation de $S(\alpha)$ par $\widetilde{S}_{n,2p}(\alpha)$ lorsque, n étant fixé, p tend vers $+\infty$? Pour le calcul numérique de $S(\alpha)$, comment doit-on choisir n et p ?

Solution

Partie I

I.A.1) Compte tenu des hypothèses sur f, on déduit de l'inégalité de la moyenne que $\forall k \in [a+1, +\infty[$, $f(k+1) \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} f \leqslant f(k)$.

Donc : $\forall k \in [a+1, +\infty[$, $\displaystyle\int_k^{k+1} f \leqslant f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f \qquad (1).$

I.A.2) La fonction $f_\alpha : x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$ est continue, décroissante sur $[1, +\infty[$.

• Si $\alpha \leqslant 0$ la série $\sum f_\alpha(k)$ diverge grossièrement.

• Si $\alpha > 1$, on déduit de (1) : $\forall k \geqslant 2, 0 < f_\alpha(k) \leqslant \dfrac{1}{\alpha-1}\big(f_{\alpha-1}(k-1) - f_{\alpha-1}(k)\big)$

Comme $\lim\limits_{k\to\infty} f_{\alpha-1}(k) = 0$, la série $\sum \big(f_{\alpha-1}(k-1) - f_{\alpha-1}(k)\big)$ converge et par comparaison des séries à termes positifs, $\sum f_\alpha(k)$ converge.

• Si $\alpha = 1$, $f_1(k) \geqslant \ln(k+1) - \ln(k) > 0$ pour tout $k \geqslant 2$.
Comme $\lim\limits_{k\to\infty} \ln(k) = +\infty$, la série $\sum \big(\ln(k+1) - \ln(k)\big)$ diverge et par comparaison des séries à termes positifs, $\sum f_1(k)$ diverge.

• Si $0 < \alpha < 1$, comme, pour tout $n \geqslant 1$, $\dfrac{1}{n^\alpha} \geqslant \dfrac{1}{n} > 0$ la série $\sum f_\alpha$ diverge.

I.A.3) Si $\alpha > 1$, comme les séries $\sum f_\alpha(k)$ et $\sum \big(f_{\alpha-1}(k-1) - f_{\alpha-1}(k)\big)$ convergent, par sommation, $0 < \displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} f_\alpha(k) \leqslant \frac{1}{\alpha-1}\sum_{k=2}^{\infty}\big(f_{\alpha-1}(k-1) - f_{\alpha-1}(k)\big)$

i.e. $0 < S(\alpha) - 1 \leqslant \dfrac{1}{\alpha-1}$. Donc $\forall \alpha > 1, 1 \leqslant S(\alpha) \leqslant \dfrac{1}{\alpha-1}\cdot$

I.B.1) Comme $\alpha > 1$, en procédant comme en I.A.3), on a par sommation
$$\frac{1}{1-\alpha}\sum_{k=n}^{\infty}\left[f_{\alpha-1}(k+1)-f_{\alpha-1}(k)\right] \leqslant \sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^\alpha} \leqslant \frac{1}{\alpha-1}\sum_{k=n}^{\infty}\left(f_{\alpha-1}(k-1)-f_{\alpha-1}(k)\right]$$
i.e. $\dfrac{1}{1-\alpha}\Big(0-\dfrac{1}{n^{\alpha-1}}\Big) \leqslant R_n(\alpha) \leqslant \dfrac{1}{\alpha-1}\dfrac{1}{(n-1)^{\alpha-1}}\cdot$

Donc $0 \leqslant R_n(\alpha) - \dfrac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} \leqslant \dfrac{1}{\alpha-1}\Big[\dfrac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \dfrac{1}{n^{\alpha-1}}\Big] = w_n.$

$w_n = \dfrac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}\Big[\Big(1-\dfrac{1}{n}\Big)^{1-\alpha} - 1\Big] \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^\alpha}$ car $(1+x)^\lambda \underset{x\to 0}{=} 1+\lambda x+o(x).$

Donc $w_n = O\Big(\dfrac{1}{n^\alpha}\Big)$ et par suite $R_n(\alpha) = \dfrac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} + O\Big(\dfrac{1}{n^\alpha}\Big)\cdot$

I.B.2) Rappelons la formule de Taylor avec reste intégrale.
Si f est une fonction de $\mathcal{C}^{n+1}(I,\mathbb{C})$, pour tout $a,b\in I$,
$$f(b) = \sum_{j=0}^{n}\frac{(b-a)^j}{j!}f^{(j)}(a) + \int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!}f^{(n+1)}(x)dx.$$
Ici, $f : x \mapsto \dfrac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^\star$, $a=k$, $b=k+1$.

$\forall x\in\mathbb{R}_+^\star, f'(x) = x^{-\alpha}, f''(x) = -\alpha x^{-\alpha-1}$ et $f^{(3)}(x) = \alpha(\alpha+1)x^{-\alpha-2}$.

$f(k+1) = f(k) - \dfrac{\alpha}{2k^{\alpha+1}} + \alpha(\alpha+1)\displaystyle\int_k^{k+1}\dfrac{(k+1-x)^2}{2x^{\alpha+2}}dx.$

Si $x\in[k,k+1]$, on a $0 \leqslant (k+1-x)^2 \leqslant 1$ et $0 < \dfrac{1}{x^{\alpha+2}} \leqslant \dfrac{1}{k^{\alpha+2}}\cdot$

Donc $A_k = \alpha(\alpha+1)\displaystyle\int_k^{k+1}\dfrac{(k+1-x)^2}{2x^{\alpha+2}}dx$ vérifie $0 \leqslant A_k \leqslant \dfrac{\alpha(\alpha+2)}{2k^{\alpha+2}}\cdot$

I.B.3) Si $\alpha > 1$, $\lim\limits_{k\to\infty} f(k) = 0$, donc $\sum\big(f(k+1-f(k)\big)$ converge.

Comme $\sum\dfrac{1}{k^\alpha}$ et $\sum\dfrac{1}{k^{\alpha+1}}$ converge, $\sum A_k$ converge et
$$\forall n \geqslant 1, \sum_{k=n}^{\infty}\big(f(k+1)-f(n)\big) = \sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^\alpha} - \frac{\alpha}{2}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^{\alpha+1}} + \sum_{k=n}^{\infty}A_k$$
i.e. $-\dfrac{1}{(1-\alpha)n^{\alpha-1}} = R_n(\alpha) - \dfrac{\alpha}{2}R_n(\alpha+1) + \displaystyle\sum_{k=n}^{\infty}A_k \qquad (2).$

On déduit de I.B.1) que $R_n(\alpha+1) = \dfrac{1}{\alpha n^\alpha} + O\Big(\dfrac{1}{n^{\alpha+1}}\Big)\cdot$

On déduit de I.B.2) que $0 \leqslant \displaystyle\sum_{k=n}^{\infty}A_k \leqslant \dfrac{\alpha(\alpha+2)}{2}R_n(\alpha+2).$

Comme $R_n(\alpha+2) = O\Big(\dfrac{1}{n^{\alpha+1}}\Big)$, on déduit de (2) que
$$R_n(\alpha) = \frac{1}{(\alpha-1)n^\alpha} + \frac{1}{2n^\alpha} + O\Big(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\Big)\cdot$$