

Table des matières

1. COMPLÉMENTS D'ALGÈBRE LINÉAIRE	1
I. Produit et somme	1
A. Produit	1
B. Sommes	2
C. Décomposition de E en somme directe	4
II. Matrices et endomorphismes	6
A. Stabilité et blocs	6
B. Polynômes d'endomorphisme	8
C. Similitude, trace	11
III. Déterminants	13
A. Calculs classiques	13
B. Comatrice	14
IV. Formes linéaires et hyperplans	15
A. Définitions	15
B. Propriétés	15
C. Cas de la dimension finie	16
Exercices	17
Travaux dirigés	37
Noyaux itérés	37
Commutateurs	40
Automorphismes de $\mathcal{L}(E)$	42
Splines cubiques	45
2. RÉDUCTION	47
I. Éléments propres	47
A. Cas d'un endomorphisme	47
B. Cas d'une matrice	49
C. Polynôme caractéristique	50
II. Réduction en dimension finie	54
A. Endomorphisme diagonalisable	54
B. Matrice diagonalisable	56
C. Puissances d'une matrice diagonalisable	57
D. Trigonalisation	59
Exercices	60

Travaux dirigés	71
Convergence de (A^m)	71
Projecteurs spectraux	72
Problème de Dirichlet discret	74
Endomorphismes de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ conservant le rang	77
Produit tensoriel	81
3. ESPACES VECTORIELS NORMÉS	83
I. Normes et distances	83
A. Définitions	83
B. Exemples fondamentaux	85
C. Applications lipschitziennes	87
D. Comparaison des normes	88
II. Suites	89
A. Nature d'une suite	89
B. Propriétés	90
C. Théorème de Bolzano-Weierstrass	91
III. Topologie d'un espace vectoriel normé	92
A. Point intérieur, partie ouverte	92
B. Point adhérent, partie fermée	93
C. Adhérence, intérieur, frontière	94
IV. Limite et continuité	95
A. Limite	95
B. Continuité en un point	97
C. Continuité sur une partie	97
D. Applications linéaires ou multilinéaires	99
Exercices	100
Travaux dirigés	109
Intersection de boules fermées	109
Distance d'un point à une partie	110
Commutant d'une matrice	111
4. SUITES ET SÉRIES	113
I. Séries numériques	113
A. Comparaison à une intégrale	113
B. Règle de d'Alembert	114
C. Formule de Stirling	115
D. Théorème spécial des séries alternées	116
E. Produit de Cauchy	117
II. Suites et séries de fonctions	119
A. Modes de convergence	119
B. Permutations de limites	124

III. Séries entières	127
A. Rayon de convergence	127
B. Régularité de la somme	130
C. Fonctions développables en série entière	132
Exercices	134
Travaux dirigés	156
Sommaton de relations de comparaison	156
Convergence monotone	159
Théorème de Bernstein	160
Comportement aux bornes de l'intervalle de convergence	162
5. FONCTIONS VECTORIELLES, ARCS PARAMÉTRÉS	165
I. Dérivabilité	165
A. Généralités	165
B. Opérations	166
C. Classe \mathcal{C}^k	168
II. Arcs paramétrés	170
A. Généralités	170
B. Arcs plans	171
Exercices	174
Travaux dirigés	182
Compacts admissibles de \mathbb{C}	182
Approximation de la dérivée n -ième	185
6. INTÉGRATION	189
I. Fonctions continues par morceaux	189
A. Généralités	189
B. Intégrale sur un segment	190
II. Intégrales généralisées	191
A. Convergence, absolue convergence	191
B. Intégrabilité	193
C. Calcul effectif	196
III. Suites et séries de fonctions intégrables	197
A. Théorème de convergence dominée	197
B. Intégration terme à terme	198
C. Utilisation des deux théorèmes dans le cas positif	199
IV. Intégrales à paramètre	199
A. Continuité	199
B. Classe \mathcal{C}^k	200
C. Exemple de la fonction Γ	201
Exercices	202

Travaux dirigés	219
Transformation de Laplace	219
Application de la transformation de Laplace à un système différentiel	222
Formule de Stirling	223
Calcul de $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^n dt$	224
Fonction définie par une intégrale	226
Intégration des relations de comparaison	228
7. ESPACES PRÉHILBERTIENS	231
I. Structure préhilbertienne	231
A. Produit scalaire	231
B. Orthogonalité	233
C. Bases orthonormales d'un espace euclidien	236
D. Projection orthogonale	237
E. Formes linéaires et hyperplans	239
II. Isométries d'un espace euclidien	240
A. Isométries et groupe orthogonal	240
B. Matrices orthogonales	241
C. Espace euclidien orienté de dimension 2 ou 3	242
D. Groupe $O(2)$	245
E. Groupe $O(3)$	246
III. Endomorphismes symétriques	248
A. Généralités	248
B. Stabilités	248
C. Théorème spectral	249
D. Réduction de l'équation d'une courbe du second degré	250
Exercices	251
Travaux dirigés	267
Caractérisations des espaces euclidiens	267
Matrice symétrique positive	269
Polynômes orthogonaux ; généralités	272
Polynômes de Legendre	275
Polynômes de Tchebychev de première espèce	279
Déterminant de Gram	281
Optimisation d'une forme quadratique	284
Endomorphismes antisymétriques	286
8. PROBABILITÉS	289
I. Espaces probabilisés	289
A. Ensembles dénombrables	289
B. Espaces probabilisés	290
C. Conditionnement et indépendance	293

II. Variables aléatoires discrètes	295
A. Variable discrète et loi	295
B. Couple de variables aléatoires	297
C. Lois discrètes usuelles	299
D. Moments d'une variable aléatoire	303
E. Fonctions génératrices	308
Exercices	311
Travaux dirigés	320
Autour des records	320
Somme de variables aléatoires	324
9. CALCUL DIFFÉRENTIEL	329
I. Dérivées partielles d'ordre 1	329
A. Généralités	329
B. Règle de la chaîne	331
C. Gradient	332
D. Applications géométriques	333
II. Dérivées partielles d'ordre 2	335
A. Généralités	335
B. Extremum	336
Exercices	338
Travaux dirigés	345
Équations aux dérivées partielles	345
Équation de la chaleur	347
10. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES	351
I. Système différentiel	351
A. Généralités	351
B. Résolution d'un système différentiel	352
II. Équations différentielles linéaires scalaires	354
A. Équation d'ordre n	354
B. Cas d'une équation d'ordre 2	355
Exercices	357
Travaux dirigés	364
Lemme de Gronwall ; applications	364
Méthode d'approximation d'Euler	367
Wronskien et entrelacement de Sturm	369