1. COMPLÉMENTS D'ALGÈBRE LINÉAIRE

Ce chapitre suppose acquises plusieurs notions du cours d'algèbre linéaire de première année : espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels, dimension, applications linéaires et matrices. Seules les notions spécifiquement au programme de seconde année sont abordées en cours, exercices et travaux dirigés permettront néanmoins une révision complète du programme de première année.

$\mathbb{K}$ désigne l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E et F sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

I. Produit et somme

A. Produit

Si $E_1, \ldots, E_p$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels alors on vérifie que $E_1 \times \cdots \times E_p$ muni des lois définies par $\begin{cases} (x_1, \ldots, x_p) + (y_1, \ldots, y_p) = (x_1 + y_1, \ldots, x_p + y_p) \\ \lambda(x_1, \ldots, x_p) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_p) \end{cases}$ est aussi un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
q est un élément de $\mathbb{N}^\star$, $q \geqslant 2$, $E_1, \ldots, E_q$ sont des sous-espaces vectoriels de E.

Exemple
Si $(n_1, \ldots, n_p) \in \mathbb{N}^p$ alors $\mathbb{K}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{K}^{n_p} = \mathbb{K}^{n_1 + \cdots + n_p}$.

Théorème

Si $E_1, \ldots, E_p$ sont de dimension finie alors $E_1 \times \cdots \times E_p$ est aussi de dimension finie et $\dim(E_1 \times \cdots \times E_p) = \sum_{i=1}^{p} \dim(E_i)$.

Démonstration
Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E alors $\varphi : \begin{pmatrix} \mathbb{K}^n & \to & E \\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) & \mapsto & \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \end{pmatrix}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels dit associé à la base.
Soient $e_1, \ldots, e_p$ des bases respectives de $E_1, \ldots, E_p$ et $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ les isomorphismes associés.
Alors $\Phi : \begin{pmatrix} \mathbb{K}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{K}^{n_p} & \to & E_1 \times \cdots \times E_p \\ (\Lambda_1, \ldots, \Lambda_p) & \mapsto & (\varphi_1(\Lambda_1), \ldots, \varphi_p(\Lambda_p)) \end{pmatrix}$ est, par construction, un isomorphisme si l'on note $n_1, \ldots, n_p$ les dimensions respectives de $E_1, \ldots, E_p$.

Par suite $\dim(E_1 \times \cdots \times E_p) = \dim(\mathbb{K}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{K}^{n_p}) = \dim(\mathbb{K}^{n_1+\cdots+n_p})$ soit $\dim(E_1 \times \cdots \times E_p) = \sum_{i=1}^{p} \dim(E_i)$. □

B. Sommes

On note $E_1, \ldots, E_p$ des sous-espaces vectoriels du même espace vectoriel E.

1. Définitions

Définition

On note $\sum_{i=1}^{p} E_i$ *l'ensemble* $\left\{ \sum_{i=1}^{p} x_i \mid (x_1, \ldots, x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p \right\}$.

Remarques

1. L'application Ψ de $E_1 \times \cdots \times E_p$ dans E définie par $\Psi(x_1, \ldots, x_p) = \sum_{i=1}^{p} x_i$ est linéaire, son image est $\sum_{i=1}^{p} E_i$, donc un sous-espace vectoriel de E.

2. Si on note Φ l'application de $E_1 \times \cdots \times E_p$ dans $\sum_{i=1}^{p} E_i$ définie par :

$\Phi(x_1, \ldots, x_p) = \sum_{i=1}^{p} x_i$, Φ est linéaire surjective.

3. $\sum_{i=1}^{p} E_i$ est le sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}\left(\bigcup_{i=1}^{p} E_i\right)$ engendré par $\bigcup_{i=1}^{p} E_i$ car c'est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant cette partie.

Exemple

Si $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_0[X] \subset \mathbb{K}_1[X] \subset \cdots \subset \mathbb{K}_n[X]$ d'où $\sum_{i=0}^{n} \mathbb{K}_i[X] = \mathbb{K}_n[X]$.

Définition

On dit que $\sum_{i=1}^{p} E_i$ *est une somme directe, et on la note alors* $\bigoplus_{i=1}^{p} E_i$, *si l'application* $\Phi : E_1 \times \cdots \times E_p \to \sum_{i=1}^{p} E_i$, $(x_1, \ldots, x_p) \mapsto \sum_{i=1}^{p} x_i$ *est un isomorphisme de* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels.*

Théorème

Il y a équivalence entre :

(i) $\sum_{i=1}^{p} E_i$ *est directe ;*

(ii) *La seule décomposition de* 0_E *dans* $\sum_{i=1}^{p} E_i$ *est* $0_E = \sum_{i=1}^{p} 0_{E_i}$ *;*

(iii) $\forall x \in \sum_{i=1}^{p} E_i,\ \exists!(x_1, \ldots, x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p,\ x = \sum_{i=1}^{p} x_i$;

(iv) $\forall k \in [\![1, p[\![,\ \left(\sum_{i=1}^{k} E_i\right) \cap E_{k+1} = \{0_E\}$.

Démonstration

• Comme Φ est linéaire surjective et comme la condition (ii) exprime son injectivité on a immédiatement l'équivalence entre (i) et (ii).

• De même (iii) signifie que Φ est bijective, d'où (i) $\Longleftrightarrow$ (iii).

• Supposons (i), choisissons k dans $[\![1, p[\![$ puis x dans $\left(\sum_{i=1}^{k} E_i\right) \cap E_{k+1}$, écrivons $x = \sum_{i=1}^{k} x_i$ où $(x_1, \ldots, x_k) \in E_1 \times \cdots \times E_k$.

On a $x = \Phi(x_1, \ldots, x_k, 0_{E_{k+1}}, \ldots, 0_{E_p}) = \Phi(0_{E_1}, \ldots, 0_{E_k}, x, 0_{E_{k+2}}, \ldots, 0_{E_p})$, d'où $x = 0_{E_{k+1}} = 0_E$ par injectivité de Φ.

• Supposons (iv) et $(x_1, \ldots, x_p)$ dans $\mathrm{Ker}(\Phi) \setminus \{0_E\}$.

Avec $k' = \max\left\{i \in [\![1, p]\!] \;\middle|\; x_i \neq 0_E\right\}$ on a $k' > 1$ et, en posant $k = k' - 1$, $k \in [\![1, p[\![$ et aussi $x_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} (-x_i) \in \left(\sum_{i=1}^{k} E_i\right) \cap E_{k+1} = \{0_E\}$: absurde. Donc Φ est injective et (iv) $\Rightarrow$ (i). $\square$

2. Supplémentaires

Définition

Deux sous-espaces vectoriels de V et *W de E sont dits supplémentaires si $E = V \oplus W$.*

Remarque

V et W sont supplémentaires si, et seulement si, tout x de E s'écrit de façon unique $x = v + w$ où $(v, w) \in V \times W$ ou encore si, et seulement si, l'application $\Phi : V \times W \to E,\ (v, w) \mapsto v + w$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, c'est à dire si, et seulement si, $V \cap W = \{0_E\}$.

Exemple

Soit P élément de $\mathbb{K}[X]$ de degré $n+1$ où $n \in \mathbb{N}$ et (P) l'ensemble de ses multiples, $(P) = \left\{AP \;\middle|\; A \in \mathbb{K}[X]\right\}$, alors $\mathbb{K}_n[X]$ et (P) sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{K}[X]$.

En effet, ce sont facilement deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}[X]$ et le théorème de division euclidienne montre que tout élément A de $\mathbb{K}[X]$ s'écrit de façon unique $A = S + R$ où $S \in (P)$ et $R \in \mathbb{K}_n[X]$.

3. Cas de la dimension finie

Théorème

Si E est de dimension finie alors $\dim\left(\sum_{i=1}^{p} E_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \dim(E_i)$ *et il y a égalité si, et seulement si, $\sum_{i=1}^{p} E_i$ est directe.*

Démonstration

Comme $\Phi : E_1 \times \ldots \times E_p \to \sum_{i=1}^{p} E_i,\ (x_1, \ldots, x_q) \mapsto \sum_{i=1}^{q} x_i$ est linéaire surjective on a l'inégalité. La somme est directe si, et seulement si, Φ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels *ie.* si, et seulement si, $E_1 \times \ldots \times E_q$ et $\sum_{i=1}^{q} E_i$ sont de même dimension, d'où le résultat. □

Dans le cas $q = 2$ on obtient immédiatement le

Corollaire

> *En dimension finie n, si V est un sous-espace vectoriel de dimension p alors tout supplémentaire est de dimension $n - p$.*
> *Si W est un sous-espace vectoriel de dimension $n-p$ alors il est supplémentaire de V si, et seulement si, $V \cap W = \{0_E\}$.*

C. Décomposition de E en somme directe

1. Applications linéaires

Théorème

> *Si $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$ et si, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $u_i \in \mathcal{L}(E_i, F)$, alors il existe un unique élément u de $\mathcal{L}(E, F)$ tel que $u\big|_{E_i} = u_i$ pour tout i de $[\![1, p]\!]$, $u\big|_{E_i}$ désignant la restriction de u à E_i.*

Démonstration

• Si un tel u existe alors, pour x dans E, $x = \sum_{i=1}^{p} x_i$ où $(x_1, \ldots, x_p) \in E_1 \times \ldots \times E_p$, par linéarité on a $u(x) = \sum_{i=1}^{p} u(x_i) = \sum_{i=1}^{p} u_i(x_i)$ ce qui prouve l'unicité de u.

• Si $x \in E,\ x = \sum_{i=1}^{p} x_i$, posons $u(x) = \sum_{i=1}^{p} u_i(x_i)$, l'unicité de la décomposition de chaque x prouve que l'on a ainsi défini une application.
Si $x \in E_i$, la définition de $u(x)$ donne $u(x) = u_i(x)$ d'où $u\big|_{E_i} = u_i$.

Si $(x, y) \in E^2,\ \lambda \in \mathbb{K},\ x = \sum_{i=1}^{p} x_i$ et $y = \sum_{i=1}^{p} y_i$ où $(x_1, \ldots, x_p)$ et $(y_1, \ldots, y_p)$ dans $E_1 \times \ldots \times E_p$, on a $\lambda x + y = \sum_{i=1}^{p} (\lambda x_i + y_i)$ et $(\lambda x_1 + y_1, \ldots, \lambda x_p + y_p) \in E_1 \times \ldots \times E_p$, d'où, par définition, $u(\lambda x + y) = \sum_{i=1}^{p} u_i(\lambda x_i + y_i) = \lambda \sum_{i=1}^{p} u_i(x_i) + \sum_{i=1}^{p} u_i(y_i)$ soit encore $u(\lambda x + y) = \lambda u(x) + u(y)$ ce qui termine la démonstration. □

Remarque
On vient de montrer que l'application Θ de $\mathcal{L}(E,F)$ dans $\mathcal{L}(E_1,F)\times\ldots\times\mathcal{L}(E_p,F)$ définie par $\Theta(u)=\left(u\big|_{E_i}\right)_{1\leqslant i\leqslant p}$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Exemple : projecteurs associés à une décomposition

• Fixons i dans $[\![1,p]\!]$, soit p_i l'unique élément de $\mathcal{L}(E)$ vérifiant $p_i(x)=\delta_{i,j}\,x$ si $j\in[\![1,p]\!]$ et $x\in E_j$. Pour tout j dans $[\![1,p]\!]$ on a $p_i^2\big|_{E_j}=p_i\big|_{E_j}$ d'où, par unicité, $p_i^2=p_i$, et donc p_i est un projecteur.
On a immédiatement $E_i\subset \mathrm{Im}(p_i)$ et, si $x\in\mathrm{Im}(p_i)$, alors $p_i(x)=x$ car p_i est un projecteur. En décomposant x on a immédiatement $x\in E_i$ d'où $\mathrm{Im}(p_i)=E_i$.
De même $\mathrm{Ker}(p_i)=\bigoplus\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{p} E_j$.

• Si $(i,j,k)\in[\![1,p]\!]^3$ et $i\neq j$ on a $(p_i\circ p_j)\big|_{E_k}=0$ d'où $p_i\circ p_j=0$.

• Pour tout j dans $[\![1,p]\!]$, $\forall x\in E_j$, $\left(\sum\limits_{i=1}^{p}P_i\right)\Big|_{E_j}(x)=x$ d'où $\sum\limits_{i=1}^{p}p_i=I_E$.

2. Cas de la dimension finie

Ici E est de dimension $n\geqslant 1$ et on suppose $E=\bigoplus\limits_{i=1}^{p}E_i$.

Théorème et définitions

> *Si, pour tout i de $[\![1,p]\!]$, e_i désigne une* ***base*** *de E_i, alors la famille e obtenue en réunissant les e_i est une base de E, elle est dite* ***adaptée*** *à la décomposition $E=\bigoplus\limits_{i=1}^{p}E_i$.*
> *Si F est un sous-espace vectoriel de E, une base est dite adaptée à F si ses premiers éléments constituent une base de F.*

Démonstration

e étant de cardinal $n=\sum\limits_{i=1}^{p}\dim(E_i)$, il suffit de montrer qu'elle est génératrice de E. Si $x\in E$, $x=\sum\limits_{i=1}^{p}x_i$ où $(x_1,\ldots,x_p)\in E_1\times\ldots\times E_p$, on a, pour tout $i\in[\![1,p]\!]$, $x_i\in E_i=\mathrm{Vect}(e_i)$ et donc, par sommation, $x\in\mathrm{Vect}(e)$, ce qui termine la preuve. □

Exemple
Avec ces notations, si $\forall i\in[\![1,p]\!]$, $\dim(E_i)=n_i$ la matrice notée P_i relativement à e du projecteur p_i associé à la décomposition $E=\bigoplus\limits_{i=1}^{p}E_i$ est diagonale par blocs égale à $\mathrm{Diag}(0_{n_1},\ldots,0_{n_{i-1}},I_{n_i},0_{n_{i+1}},\ldots,0_{n_p})$, la relation $\sum\limits_{i=1}^{p}p_i=I_E$ équivaut à $\sum\limits_{i=1}^{p}P_i=I_n$, qui est immédiate.

De la même façon si l'on fractionne la base e de E en p sous-familles $e_1, \dots, e_p$ où $e = (e_1, \dots, e_n), e_1 = (e_1, \dots, e_{n_1}), e_2 = (e_{n_1+1}, \dots, e_{n_1+n_2}), \dots,$
$e_{n_p} = (e_{n_1+\dots+n_{p-1}+1}, \dots, e_n)$ avec $n_1, \dots n_p$ entiers naturels de somme n il vient la

Propriété

> *Si, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$ on pose $E_i = \mathrm{Vect}(e_i)$ alors $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$ et e est adaptée à cette décomposition.*

II. Matrices et endomorphismes

A. Stabilité et blocs

1. Blocs

Un calcul fastidieux mais sans mystère montre le

Théorème

> *Si $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $M' = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{p,q}\mathbb{K})$ où $A \in \mathfrak{M}_{r,s}(\mathbb{K})$ et $A' \in \mathfrak{M}_{s,t}(\mathbb{K})$ alors $MM' = \begin{pmatrix} AA' + BC' & AB' + BD' \\ CA' + DC' & CB' + DD' \end{pmatrix}$.*

Remarque

Dès que $n = p$ on impose $r = s$ afin que les blocs diagonaux soient des blocs carrés.

Corollaire

> *Le produit, lorsqu'il existe, de deux matrices carrées triangulaires supérieures (resp. inférieures) est une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure).*

Démonstration

Par transposition il suffit de traiter le cas des matrices triangulaires supérieures.
On raisonne par récurrence sur le nombre n de lignes et de colonnes, le cas $n = 1$ étant immédiat.
Si le résultat est prouvé pour des éléments de $\mathcal{T}_n(\mathbb{K})$ et si $(A, B) \in \big(\mathcal{T}_{n+1}(\mathbb{K})\big)^2$, on écrit $A = \begin{pmatrix} \alpha & U \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \beta & V \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}$ où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ et $(A_1, B_1) \in \big(\mathcal{T}_n(\mathbb{K})\big)^2$, alors $AB = \begin{pmatrix} \alpha\beta & \alpha V + UB_1 \\ 0 & A_1 B_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{T}_{n+1}(\mathbb{K})$ par hypothèse de récurrence. $\square$

Dans le même genre d'idée on va montrer le

Théorème

> *Si $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ alors M est inversible si, et seulement si, A et D le sont. Si c'est le cas alors $M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix}$.*

Démonstration

Posons $M' = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$, alors on a $MM' = \begin{pmatrix} AA'+BC' & AB'+BD' \\ DC' & DD' \end{pmatrix}$ et donc

$MM' = I_n$ a lieu si, et seulement si, $\begin{cases} DD' = I_{n-r} \\ DC' = 0 \\ AA'+BC' = I_r \\ AB'+BD' = 0 \end{cases}$

Ce système se résout facilement en D inversible et $D' = D^{-1}$, $C' = 0$, A inversible et $A' = A^{-1}$ et enfin $B' = -A^{-1}BD^{-1}$, ce qui établit le théorème. □

2. Stabilité

F désigne un sous-espace vectoriel de E et u un endomorphisme de E.

2.1. Définition

> ***1.*** *F est dit stable par u si $u(F) \subset F$ ie. si, pour tout x dans F, $u(x) \in F$.*
>
> ***2.*** *Dans ce cas on appelle **endomorphisme induit** par u sur F l'endomorphisme de F qui à tout x associe $u(x)$.*

Remarques

1. Ne pas confondre l'endomorphisme induit qui est élément de $\mathcal{L}(F)$ et la restriction $u\big|_F$ qui est élément de $\mathcal{L}(F,E)$.

2. F est stable par u si, et seulement si, pour toute projection p sur F on a $p \circ u\big|_F = u\big|_F$ ou encore $p \circ u \circ p = u \circ p$.

3. Si $\widetilde{u}$ est l'endomorphisme induit par u sur F alors $\mathrm{Ker}(\widetilde{u}) = \mathrm{Ker}(u) \cap F$ et $\mathrm{Im}(\widetilde{u}) = u(F)$.

Exemple

Soient $E = \mathbb{K}[X]$ et $\Delta : P(X) \mapsto P(X+1) - P(X)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, Δ induit un endomorphisme Δ_n de $\mathbb{K}_{n+1}[X]$.

Si $P \in \mathrm{Ker}(\Delta)$ alors $x \mapsto P(x) - P(0)$ est 1-périodique, nulle en 0 donc sur $\mathbb{Z}$ infini d'où $P(X) = P(0)$. Comme réciproquement $\mathbb{K}_0[X] \subset \mathrm{Ker}(\Delta)$ cela montre que $\mathbb{K}_0[X] = \mathrm{Ker}(\Delta) = \mathrm{Ker}(\Delta_n)$ lequel est donc de dimension 1.

De plus $\mathrm{Im}(\Delta_n) \subset \mathbb{K}_n[X]$ et le théorème de rang montre que ces deux espaces vectoriels ont même dimension, d'où $\mathrm{Im}(\Delta_n) = \mathbb{K}_n[X]$.

Propriété

> *Si v est un endomorphisme de E qui commute avec u alors* $\mathrm{Im}(v)$ et $\mathrm{Ker}(v)$ *sont stables par u*

Démonstration

Si $y \in \mathrm{Im}(v)$, $y = v(x)$ où $x \in E$, alors on a $u(y) = v\big[u(x)\big] \in \mathrm{Im}(v)$ et, si $z \in \mathrm{Ker}(v)$, $v\big[u(z)\big] = u\big[v(z)\big] = 0$ donc $u(z) \in \mathrm{Ker}(v)$. □

2.2. Utilisation des blocs

On suppose E de dimension finie.

Théorème

> *F est stable par u si, et seulement si, relativement à une base adaptée à F, la matrice de u est triangulaire supérieure par blocs.*

Démonstration

Soit $e = (e_1, \ldots, e_n)$ base adaptée à F avec $b = (e_1, \ldots, e_p)$ base de F.

F est stable par u si, et seulement si, pour tout i de $[\![1,p]\!]$, $u(e_i)\in F$ ou encore $u(e_i)\in \mathrm{Vect}(e_1,\ldots,e_p)$, ce qui revient à dire que la matrice de u relativement à e est triangulaire supérieure par blocs, $\begin{pmatrix} A & B \\ 0_{n-p,p} & C \end{pmatrix}$. □

Remarque

Si c'est vrai pour une base adaptée alors c'est vrai pour toute base adaptée.

On suppose alors $E=\bigoplus_{i=1}^{p} E_i$ et, pour tout $i\in[\![1,p]\!]$, on pose $\dim(E_i)=n_i\in\mathbb{N}^\star$.
On démontre de la même façon le

Théorème

> *Chacun des E_i est stable par u si, et seulement si, il existe une base adaptée à la décomposition $E=\bigoplus_{i=1}^{p} E_i$ relativement à laquelle la matrice M de u est diagonale par blocs, $M=\mathrm{Diag}(M_1,\ldots,M_p)$ où : $\forall i\in[\![1,p]\!],\ M_i\in\mathfrak{M}_{n_i}(\mathbb{K})$.*

Remarques

1. On peut, dans cet énoncé, remplacer « il existe une base adaptée » par « pour toute base adaptée ».

2. Dans le cas où chacun des E_i est une droite dirigée par e_i on obtient :
$M_{\mathcal{E}}(u)$ est diagonale si, et seulement si, pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, la droite E_i est stable par u *ie.* u induit une homothétie sur chaque E_i.

B. Polynômes d'endomorphisme

1. Définitions

u désigne un endomorphisme de E.

Définition

> *Si $P=\sum_{k=0}^{p} a_kX^k$, on note $P(u)$ l'endomorphisme $\sum_{k=0}^{p} a_ku^k$ où, en utilisant la structure de $\mathbb{K}$-algèbre de $\mathcal{L}(E)$, u^k désigne l'itéré k-ième de u, en particulier $u^0=I_E$.*
> *De même si $M\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ on note $P(M)$ la matrice $\sum_{k=0}^{p} a_kM^k$ où $M^0=I_n$.*

Exemples

Pour $P=X^0,\ X,\ X^2$, on obtient successivement $P(u)=I_E,\ u,\ u^2$.

Théorème

> *L'application de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathcal{L}(E)$ qui à tout P associe $P(u)$ est un morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres.*

Démonstration

- La définition de $P(u)$ montre immédiatement la linéarité de $P\mapsto P(u)$.
- On a déjà vu que l'image de l'unité X^0 de $\mathbb{K}[X]$ est l'unité I_E de $\mathcal{L}(E)$.