

Chapitre 1

Logique mathématique

Les énoncés logiques dont il est question dans ce chapitre sont à prendre au sens naïf. Ce sens se précisera à mesure de l'avancement du lecteur dans l'étude de ce cours.

1.1 Condition nécessaire et condition suffisante

Soient E et F des énoncés logiques. Supposons **vraie** l'implication :

$$E \Rightarrow F$$

Ceci signifie (du point de vue pratique) que si E est vrai alors F est vrai. Donc pour que E soit vrai **il faut** que F soit vrai, et pour que F soit vrai **il suffit** que E soit vrai. On dit que

- la condition " F est vrai" est une **condition nécessaire** pour que E soit vrai.
- la condition " E est vrai" est une **condition suffisante** pour que F soit vrai.

ATTENTION! Une implication entre E et F ne signifie pas une relation de cause à effet, ce n'est qu'un lien logique.

1.2 Implication et équivalence

Soient E et F des énoncés logiques, l'implication directe $E \Rightarrow F$ a pour réciproque $F \Rightarrow E$. Il se peut que l'une des implications soit vraie et l'autre fausse. Si les implications $E \Rightarrow F$ et $F \Rightarrow E$ sont toutes deux vraies on écrit $E \Leftrightarrow F$ et on dit que les énoncés E et F sont **équivalents**.

Donnons deux exemples. Soit n un entier quelconque.

- L'implication (n est divisible par 4) \Rightarrow (n est divisible par 2) est vraie mais sa réciproque est fausse car un nombre pair n'est pas nécessairement divisible par 4.
- L'équivalence (n est divisible par 3) \Leftrightarrow (la somme des chiffres de n est divisible par 3) est vraie (*voir cor. 9.7, p. 220*).

En pratique, on écrit :

- *Pour qu'un entier soit divisible par 4, il faut qu'il soit pair.*
- *Pour qu'un entier soit divisible par 3, il faut et il suffit que la somme de ses chiffres soit divisible par 3.*

Pour qu'un entier soit divisible par 4, une condition **nécessaire** est donc qu'il soit pair, mais ce n'est pas **suffisant**. Pour obtenir une équivalence, il faut regarder le chiffre des unités **et** celui des dizaines (le chiffre des dizaines étant 0 si l'entier n'a qu'un chiffre). On a alors le critère suivant, facile à prouver :

Proposition 1.1. *Pour qu'un entier soit divisible par 4, il faut et il suffit que l'entier formé de ses deux derniers chiffres soit divisible par 4.*

1.3 Connecteurs et ou

Proposition 1.2. *Soient A, B et I trois points. On note $[AB]$ le segment d'extrémités A et B . On a*

$$(I \text{ est milieu de } [AB]) \Leftrightarrow (IA = IB \text{ et } I \in [AB])$$

Proposition 1.3. *Soient a et b deux nombres. On a*

$$(a \times b = 0) \Leftrightarrow (a = 0 \text{ ou } b = 0)$$

On rappelle qu'en logique, et donc en mathématiques, le "ou" n'est pas exclusif. Ainsi, dans la proposition précédente, a et b peuvent être nuls tous les deux.

Définition 1.4. *Soient a et b deux nombres. La relation $a \leq b$ signifie $a < b$ ou $a = b$.*

1.4 Négation

Si E est un énoncé, on désigne par : non E sa négation. L'énoncé non E est vrai si E est faux. L'énoncé non E est faux si E est vrai.

Il y a des abréviations, par exemple la négation de $=$ est notée \neq

Proposition 1.5. *Soient a et b deux nombres. On a*

$$(a \times b \neq 0) \Leftrightarrow (a \neq 0 \text{ et } b \neq 0)$$

Chapitre 2

Théorie des ensembles

Les mots ensemble, élément, les relations d'appartenance (\in) ou d'égalité ($=$) etc. sont à prendre au sens naïf, lequel est suffisant pour que le lecteur comprenne le contenu de ce cours.

Définition 2.1. Soient A et B des ensembles. On désigne par $A \cap B$ l'ensemble des éléments x tels que

$$x \in A \text{ et } x \in B$$

L'ensemble $A \cap B$ est appelé **intersection** de A et B .

Définition 2.2. Soient A et B des ensembles. On désigne par $A \cup B$ l'ensemble des éléments x tels que

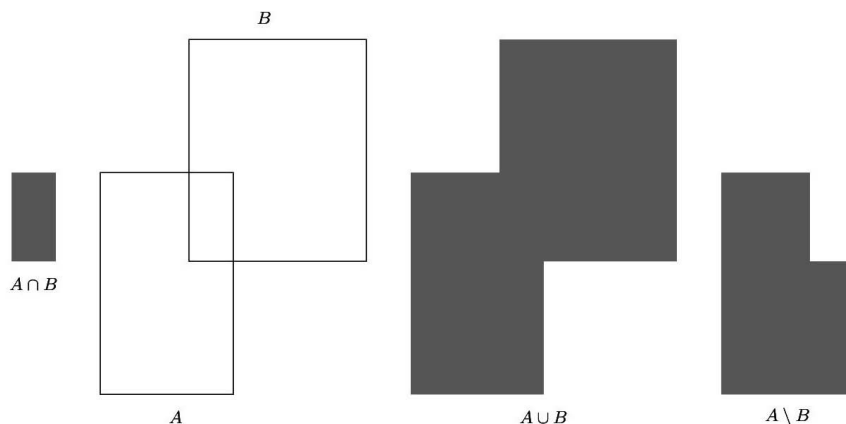
$$x \in A \text{ ou } x \in B$$

L'ensemble $A \cup B$ est appelé **réunion** de A et B .

Définition 2.3. Soient A et B des ensembles. On désigne par $A \setminus B$ l'ensemble des éléments x tels que

$$x \in A \text{ et } x \notin B$$

L'ensemble $A \setminus B$ est appelé **complémentaire** de B dans A .



Définition 2.4. Soient A et B des ensembles. On dit que A est inclus dans B et on écrit $A \subset B$ si tout élément de A est élément de B . On a donc :

$$(A \subset B) \Leftrightarrow \forall x (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

où le symbole $\forall x$ se lit “pour tout x ”.

Proposition 2.5. Soient A et B des ensembles. On a

$$A \not\subset B \Leftrightarrow (\exists x (x \in A \text{ et } x \notin B))$$

où le symbole $\exists x$ se lit “il existe x ”, c’est-à-dire, “il existe au moins un x ”.

Définition 2.6. Deux ensembles A et B sont dits égaux s’ils ont les mêmes éléments.

Proposition 2.7. Soient A et B des ensembles. On a

$$A = B \Leftrightarrow (A \subset B \text{ et } B \subset A)$$

Axiome 2.8. Il existe un ensemble qui n’a aucun élément. On l’appelle l’ensemble vide. On le note \emptyset . On a donc :

$$\forall x, x \notin \emptyset$$

Définition 2.9. Soient A et B des ensembles. On dit qu’ils sont **disjoints** s’ils n’ont aucun élément commun, ce qui équivaut à :

$$A \cap B = \emptyset$$

Définition 2.10. Soient A et B des ensembles (non vides). Une **application** f de A dans B associe à tout élément $a \in A$ un élément **unique** dans B ; cet élément est noté $f(a)$, on l’appelle l’**image** de a par f . On représente généralement une application par le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ a & \mapsto & f(a) \end{array}$$

On dit que A est l’ensemble de départ de f et que B est l’ensemble d’arrivée de f . On dit aussi que f va de A dans B . Si $f(a) = b$ on dit que a est un **antécédent** de b par f .

Chapitre 3

Algèbre

3.1 Ensembles de nombres

Définition 3.1. On note \mathbb{N} l'ensemble des entiers naturels

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Définition 3.2. On note \mathbb{Z} l'ensemble des entiers relatifs

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

L'ensemble \mathbb{Z} est la réunion de \mathbb{N} et de tous les entiers négatifs.

Définition 3.3. On note \mathbb{Q} l'ensemble des **nombre rationnels**. Ce sont les entiers et les quotients d'entiers.

Comme un entier est aussi un quotient d'entiers (écrire $a = \frac{a}{1}$), on voit qu'on a :

$$x \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{Z}, \exists b \in \mathbb{N}^*, x = \frac{a}{b}$$

Lorsque l'on divise a par b , il y a trois possibilités :

1. La division tombe juste et le quotient est donc entier.
2. La division ne tombe pas juste, mais si on la poursuit au-delà de la virgule, elle finit par tomber juste.
3. La division ne tombe pas juste et, même si on la poursuit au-delà de la virgule, elle ne s'arrête pas car on n'obtient jamais un reste nul. En ce cas, il y a une infinité de chiffres non nuls après la virgule.

Dans les deux premiers cas, on dit que x est un **nombre décimal**, un entier étant un décimal particulier. Donnons des exemples :

$$\begin{aligned}\frac{12}{4} &= 3 = 3,0000\dots \\ \frac{784}{25} &= \frac{3136}{100} = 31,36 = 31,360000\dots \\ \frac{1}{3} &= 0,3333\dots \\ \frac{22}{7} &= 3,142857142857\dots\end{aligned}$$

Les nombres 3 et 31,36 sont décimaux, tandis que $\frac{1}{3}$ et $\frac{22}{7}$ ne le sont pas. Plus généralement, on appelle **nombre réel**, tout nombre donné par une écriture décimale illimitée, éventuellement précédée du signe moins, cette écriture pouvant se terminer par une infinité de 0 répétés. On a la notion de réel positif et de réel négatif. On montre que l'on peut ajouter et multiplier entre eux des réels et que le résultat est réel.

Définition 3.4. On note \mathbb{R} l'ensemble des nombres réels.

On a les inclusions : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

On montre que l'écriture décimale d'un rationnel est toujours périodique, c'est-à-dire que les chiffres situés après la virgule se répètent. Ainsi

$$\frac{269}{330} = 0,8151515\dots$$

En fait, la périodicité de l'écriture décimale caractérise les nombres rationnels parmi les réels car on montre, réciproquement, que tout réel ayant une écriture décimale qui est périodique est rationnel. Ainsi

$$0,151515\dots = \frac{15}{99} = \frac{5}{33}$$

Donc les nombres réels qui ont une écriture décimale qui n'est pas périodique ne sont pas rationnels. On dit qu'ils sont **irrationnels**. Ainsi le nombre réel a , défini par :

$$a = 0,12112111211112\dots$$

est irrationnel. On peut écrire $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

3.2 Addition et soustraction

Proposition 3.5. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'équation

$$a + x = 0$$

admet une solution unique x . Ce réel x est appelé **opposé** de a . On le note : $-a$.

Proposition 3.6 (le signe "-" devant une parenthèse). Pour tous réels a et b on a

$$\begin{aligned}-(a + b) &= -a - b \\ -(a - b) &= -a + b \\ -(-a - b) &= a + b\end{aligned}$$

Définition 3.7. Pour tous réels a et b on dit que a est **inférieur à** b et on écrit $a \leq b$ si le réel $b - a$ est positif ou nul.

Proposition 3.8. Soient a, b, a', b' des réels on a

$$a \leq b \text{ et } a' \leq b' \Rightarrow a + a' \leq b + b'$$

ATTENTION! On ne peut pas¹ **retrancher** entre elles des inégalités de même sens.

3.3 Multiplication et division

Proposition 3.9 (associativité). Pour tous réels a, b et c on a

$$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$$

et on note simplement abc la valeur commune des deux expressions.

ATTENTION! $a(bc) \neq ab \times c$.

Proposition 3.10 (distributivité). Pour tous réels a, b et c on a

$$\begin{aligned} a \times (b + c) &= (a \times b) + (a \times c) \\ a \times (b - c) &= (a \times b) - (a \times c) \end{aligned}$$

Proposition 3.11 (identités remarquables). Pour tous réels a et b on a

$$\begin{aligned} (a + b)^2 &= a^2 + b^2 + 2ab \\ (a - b)^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \\ (a + b)(a - b) &= a^2 - b^2 \end{aligned}$$

ATTENTION! $(a - b)^2 \neq a^2 - b^2$

Proposition 3.12. Pour tout $a \in \mathbb{R}^*$, l'équation

$$a \times x = 1$$

admet une solution unique x . Ce réel x est appelé **inverse** de a . On le note $\frac{1}{a}$

ATTENTION! Ne pas confondre inverse $\frac{1}{a}$ et opposé $-a$. L'opposé de 0 est 0 mais

le nombre 0 **n'a pas d'inverse**

Définition 3.13. Soient a et b des réels. On suppose $b \neq 0$. On pose

$$\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$$

1. Dans toutes les mises en garde de ce cours, il faut comprendre qu'une règle, comportant certains paramètres variant *a priori* dans un certain ensemble, est **fausse** si elle n'est pas vraie pour **toutes** les valeurs possibles de ces paramètres pris dans cet ensemble.

Proposition 3.14. Soient a, b et c des réels tels que $b, c \neq 0$. On a

$$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$$

ATTENTION! Ne pas confondre $\frac{ac}{bc}$ et $\frac{a+c}{b+c}$. Le premier quotient se simplifie mais pas le second.

Proposition 3.15. Soient a, b, c et d des réels. Si tous les quotients existent on a

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$$

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$\frac{a}{b} \times c = \frac{ac}{b}$$

$$\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{1}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Proposition 3.16. Soient a, b, a', b' et c des réels on a

$$a \leq b \text{ et } c \geq 0 \Rightarrow ac \leq bc \tag{1}$$

$$a \leq b \text{ et } c \leq 0 \Rightarrow ac \geq bc \tag{2}$$

$$0 \leq a \leq b \text{ et } 0 \leq a' \leq b' \Rightarrow aa' \leq bb' \tag{3}$$

$$0 < a \leq b \Rightarrow \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b} \tag{4}$$

ATTENTION! On ne peut pas **diviser** entre elles des inégalités de même sens.

Théorème 3.17 (les deux principes fondamentaux de l’algèbre élémentaire). Soient a, b, c, d, x des réels, tels que $a \neq 0$. On a les équivalences :

$$\begin{aligned} c + x = d &\Leftrightarrow x = d - c \\ a \times x = b &\Leftrightarrow x = \frac{b}{a} \end{aligned}$$

Ces deux équivalences permettent de calculer x dans une équation du premier degré. Dans la première, on dit qu’on **fait passer** le terme c dans l’autre membre. Dans la deuxième, on **divise** par a les deux membres.

ATTENTION! Bien noter la différence : faire passer \neq diviser

Donnons un exemple élémentaire, montrant comment on utilise ces règles. Considérons le nombre

$$a = 0,8151515\dots$$