2 Algèbre

2.1 Générale

Exercice 2.1.

Soit le polynôme f défini pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = (4x-10)^2 - (x+3)(2x-5).$$

1. Factoriser f.
2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
3. Développer, réduire et ordonner f.
4. Calculer, en utilisant à chaque fois, l'expression de f la plus commode, les six nombres suivants :

$$f(1),\ f\left(\frac{1}{2}\right),\ f\left(\frac{-1}{2}\right),\ f(\sqrt{5}),\ f(1+\sqrt{2}),\ f(1-\sqrt{2}).$$

Exercice 2.2.

Soit le polynôme f défini par : $f(x) = (2x+3) \times (5-2x) - (2x+3)^2$.

1. Factoriser f par deux fonctions affines.
2. Développer, réduire et ordonner f.
3. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$
4. Calculer le plus simplement possible les nombres

$$f(0),\ f\left(\frac{3}{4}\right),\ f\left(\frac{-1}{4}\right),\ f\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right),\ f(1-\sqrt{5}),$$

(on donnera les résultats sous la forme d'entiers ou de fractions irréductibles ou, pour les deux derniers calculs, sous la forme $a + b\sqrt{5}$ avec a, b entiers relatifs.)

Exercice 2.3 (résolu)**.**

Soit le polynôme f défini par la formule : $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 9x^2 - 18x - 8$.

1. Factoriser f le plus possible en utilisant des racines évidentes.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x) < 0$.

Solution : 1/ Une racine évidente de f est -1, donc f se factorise par $x+1$. Par identification, on trouve :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (x+1)(3x^3 + x^2 - 10x - 8)$$

On voit que le second facteur admet encore -1 comme racine évidente. Par identification, on trouve :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ 3x^3 + x^2 - 10x - 8 = (x+1)(3x^2 - 2x - 8)$$

Le facteur du second degré s'annulant en 2, on peut le factoriser par $x-2$. Finalement, on trouve :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (x+1)^2(x-2)(3x+4)$$

2/ L'inéquation $f(x) < 0$ est donc équivalente à :

$$(x-2)(3x+4) < 0 \quad \text{et} \quad x+1 \neq 0$$

Le théorème sur le signe du trinôme permet donc de conclure :

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left]\frac{-4}{3};2\right[\setminus \{-1\}$$

L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'inéquation $f(x) < 0$ peut donc s'écrire :

$$\mathscr{S} = \left]\frac{-4}{3};-1\right[\cup \left]-1;2\right[$$

Exercice 2.4.

Soient a, b, c et d des réels et soit f le polynôme défini pour tout $x \in \mathbb{R}$ par : $f(x) = x^5 + ax + b$.

1. Développer, réduire et ordonner le produit suivant :

$$(x^2 - 4x + 1) \times (x^3 + cx^2 + dx + b)$$

2. Déterminer les réels a et b de sorte que f soit factorisable par : $x^2 - 4x + 1$.

Exercice 2.5.

Soit le polynôme f défini par la formule : $f(x) = x^5 - 2x^3 - 3x^2 - 2x$.

1. Factoriser f le plus possible en utilisant des racines évidentes.
2. Résoudre l'inéquation $f(x) < 0$.

Exercice 2.6.

Soit le polynôme f défini pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -10x^4 + 17x^3 + 7x^2 - 17x + 3$$

1. Factoriser f le plus possible en utilisant des racines évidentes.
2. Résoudre l'inéquation $f(x) \geq 0$.

Exercice 2.7.

Soit le polynôme f défini pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = 4x^4 - 9x^2 + 6\sqrt{5}.x - 5$$

Les coefficients de f sont donc 4, 0, -9, $6\sqrt{5}$ et -5. On suppose qu'il existe des réels a, b c et d tels qu'on ait la factorisation suivante

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (ax^2 + bx + c)(2x^2 - 3x + d) \tag{3}$$

1. Déterminer un système d'équations satisfaites par a, b c, d et équivalent à la factorisation (1).
2. Résoudre ce système, c'est-à-dire calculer explicitement a, b c et d.
3. En déduire le nombre de racines réelles de f. On justifiera avec soin.
4. Résoudre effectivement l'équation : $f(x) = 0$. Montrer sans calcul qu'on a : $f(-\frac{3}{4}) < 0$.

Exercice 2.8.

Soit le polynôme $f(x) = x^4 - 6x^2 + 8x - 3$.

1. Factoriser f le plus possible en utilisant des racines évidentes.
2. Résoudre l'inéquation $f(x) \leq 0$.

Exercice 2.9.

Soit le polynôme $f(x) = 15x^4 - 2x^3 - 23x^2 + 2x + 8$.

1. Factoriser f le plus possible en utilisant des racines évidentes.
2. Résoudre l'inéquation $f(x) \leq 0$.

Exercice 2.10.

Soit le polynôme $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 5x^2 + 3x + 8$.

1. Factoriser f par $x^2 + x + 1$.
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) > 0$.

Exercice 2.11.

Soit le polynôme f défini pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = 9x^4 - 36x^3 + 53x^2 - 34x + 8.$$

1. Factoriser f le plus possible (on pourra d'abord chercher des racines évidentes).
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) < 0$.

Exercice 2.12.

Soient a, b et c des réels, on suppose $a \neq 0$. On considère le polynôme $f(x) = ax^2 + bx + c$.

1. Démontrer l'implication suivante

$$a \text{ et } c \text{ sont de signes contraires } \Rightarrow f \text{ admet deux racines réelles}$$

2. Réciproque ?

Exercice 2.13.

Soit le polynôme f défini pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = -x^2 + x + 1$$

Déterminer tous les réels x tels qu'on ait : $f(x) > 0$.

Exercice 2.14.

Démontrer la propriété suivante :

$$\forall a, b, x \in \mathbb{R} \ \big(((x^2 + ax + b = 0) \Leftrightarrow (x = 1 \text{ ou } x = 2)\big) \Rightarrow (a = -3 \text{ et } b = 2)\big)$$

Exercice 2.15.

Soient a et b des réels. On considère le polynôme f défini pour tout $x \in \mathbb{R}$ par la relation

$$f(x) = -2x^4 + 7x^3 - 8x^2 + ax + b$$

1. Déterminer a et b de sorte que f soit factorisable par $x^2 - 3x + 1$.
2. Factoriser alors f explicitement.
3. Déterminer toutes les racines de f.

Exercice 2.16.

Soient a, b et c des réels, et soit le polynôme f défini pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^5 + ax^3 + bx^2 + cx + 6$$

1. Déterminer les valeurs de a, b et c telles que f ait pour racines les nombres -3, 1 et 2. (On pourra résoudre un système linéaire de trois équations à trois inconnues. Pour ce faire, on calculera l'une des inconnues en fonction des deux autres dans une de ces équations, on reportera etc.).
2. Factoriser alors f par $x^3 - 7x + 6$.

Exercice 2.17.

Factoriser le plus possible le polynôme $f(x) = -3x^4 + 16x^3 - 31x^2 + 26x - 8$.

Exercice 2.18.

Déterminer les réels a et b de sorte que le polynôme $x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + ax + b$ soit factorisable par $x^2 - 5x + 6$. On vérifiera que a et b sont des entiers à trois chiffres.

Exercice 2.19.

Déterminer les réels a et b , tels que le polynôme : $x^5 + ax^3 + bx - 4$ soit factorisable par : $x^2 - x + 1$.

Exercice 2.20.

Factoriser le polynôme $x^4 + 1$ par deux facteurs du second degré. Vérifier que ces facteurs ont un discriminant < 0. Comment pouvait-on le prévoir ?

Exercice 2.21.

Soit le polynôme $f(x) = x^4 + bx^2 + c$, où b et c sont des réels quelconques. On note $\Delta = b^2 - 4c$.

1. On suppose $\Delta \geq 0$. Factoriser f par deux polynômes du second degré (on pourra faire le changement de variable $x^2 = t$).
2. On suppose $\Delta < 0$. On a alors $c > 0$ et $b < 2\sqrt{c}$.
   a/ Écrire f comme différence de deux carrés.
   b/ En déduire une factorisation de f par deux polynômes du second degré.

Exercice 2.22.

Déterminer les réels a et b, tels que le polynôme $f(x) = x^5 - x^4 + x^3 + ax + b$ soit factorisable par $x^2 - x + 3$.

Exercice 2.23.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $6x^4 - 11x^3 - 11x^2 + 31x - 15 < 0$.

Exercice 2.24 (polynômes d'interpolation de Lagrange)**.**

Soient a, b, c trois réels distincts, et A, B, C les fonctions trinômes du second degré définies par

$$A(x) = \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}, \quad B(x) = \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}, \quad C(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}.$$

1. **Calculer** les valeurs prises par ces trois fonctions aux points a, b et c. Présenter les résultats de ces calculs dans un tableau à double entrée

x	a	b	c
$A(x)$			
$B(x)$			
$C(x)$			

Soient α, β, γ trois réels quelconques ; on considère la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \alpha A(x) + \beta B(x) + \gamma C(x).$$

2. Déterminer les images de a, b et c par f (éviter tout nouveau calcul).
3. Déterminer un polynôme f du second degré qui vérifie $f(-1) = 1$, $f(0) = -1$, $f(1) = 2$ (il n'y a aucun calcul, il suffit de choisir judicieusement a, b, c et α, β, γ). Réduire le polynôme f ainsi trouvé.

Exercice 2.25.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On considère le polynôme $f(x) = x^3 - 3a^3b^3x - a^3b^3(a^3 + b^3)$.

1. Montrer que $f(ab(a + b)) = 0$ (ne pas développer brutalement ; utiliser l'identité $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$).
2. On note g le quotient de la division de f par $x - ab(a + b)$. C'est un polynôme du second degré, soit Δ son discriminant.
   a/ Calculer g et Δ ; vérifier que $\Delta = -3a^2b^2(a - b)^2$.
   b/ En déduire que quels que soient les réels a et b, le polynôme f ne peut avoir trois racines réelles distinctes.

Exercice 2.26.

Soit le polynôme f défini pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1.$$

1. Vérifier que f est factorisable par $(x - 1)^2$, et calculer la factorisation correspondante.
2. Vérifier, avec le moins de calculs possibles, et en **présentant bien les calculs nécessaires**, qu'on a aussi :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \left(x^2 - \frac{5-\sqrt{5}}{2}x + \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x^2 - \frac{5+\sqrt{5}}{2}x + \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$$

3. Expliquer le lien qui existe entre ces deux factorisations de f.

Exercice 2.27 (polynôme réciproque, résolu)**.**

Soit le **polynôme réciproque** f défini pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 1.$$

Factoriser f le plus possible. On pourra d'abord mettre formellement x^2 en facteur dans $f(x)$ et utiliser le changement de variables

$$t = x + \frac{1}{x} \tag{1}$$

Solution : On procède comme indiqué : pour tout réel $x \neq 0$, on a

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2\left(x^2 + 2x - 1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right) \\ &= x^2\left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 2(x + \frac{1}{x}) - 1\right) \end{aligned}$$

On remarque que si t est donné par la relation (1), alors on a

$$t^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$$

donc, pour tout réel $x \neq 0$, on a

$$f(x) = x^2(t^2 - 2 + 2t - 1) = x^2 g(t)$$

en posant $g(t) = t^2 + 2t - 3$. Or g est un polynôme en t qui se factorise aisément. On a, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$g(t) = (t-1)(t+3)$$

Reportant ceci dans l'expression de f, on obtient pour tout réel $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2(t-1)(t+3) \\ &= x^2\left(x + \frac{1}{x} - 1\right)\left(x + \frac{1}{x} + 3\right) \\ &= (x^2 + 1 - x)(x^2 + 1 + 3x) \end{aligned}$$

Pour tout réel $x \neq 0$, on a donc l'égalité

$$f(x) = (x^2 - x + 1)(x^2 + 3x + 1)$$

Cette égalité vaut encore en $x = 0$ car ses deux membres prennent la même valeur en 0. On obtient donc une factorisation de f. Pour factoriser davantage, on s'intéresse à ses deux facteurs. Ils sont du second degré. Le premier n'est pas factorisable sur $\mathbb{R}$ car il a un discriminant < 0. Le second a pour discriminant $\Delta = 5$. Il est donc factorisable sur $\mathbb{R}$. Finalement, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(x) = (x^2 - x + 1)(x - x_1)(x - x_2)$$

avec

$$x_1 = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}$$

Exercice 2.28 (polynôme réciproque)**.**

Soit le polynôme

$$f(x) = x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \alpha x + 1 \ ,$$

où α et β sont des réels quelconques. On dit que f est un **polynôme réciproque**. On se propose de résoudre le problème suivant :

$$\text{factoriser } f \text{ par deux polynômes de degré deux, à coefficients réels.} \tag{1}$$

Dans tout ce problème on note $\Delta_1 = \alpha^2 - 4\beta + 8$ et $\Delta_2 = (\beta + 2)^2 - 4\alpha^2$.

Cas particulier : $\alpha = 0$

1. Résoudre le problème (1) en distinguant les cas $\beta \geq 2$ et $\beta < 2$.

On revient au cas général et on envisage deux méthodes de factorisation.

Première méthode : changement de variable $t = x + \frac{1}{x}$

2. Montrer que si $\Delta_1 \geq 0$ alors on peut résoudre le problème (1).

Deuxième méthode : identification

On cherche des réels a, b, c et d, tels qu'on ait pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d) \tag{2}$$

3. Montrer que la relation (2) équivaut à un système S de quatre équations aux inconnues a, b, c et d, non linéaire, que l'on explicitera.
4. Montrer que S implique la relation

$$a(1-b^2) = b(1-b)\alpha.$$

5. Montrer que l'on peut résoudre (1) par identification avec $b = 1$ si et seulement si $\Delta_1 \geq 0$.
6. Montrer que si $b = -1$ alors $\alpha = 0$.
7. On suppose que $b \neq 1$ et $b \neq -1$.
   a/ Montrer que S implique les relations

$$a = \frac{\alpha b}{1+b}\ , \quad c = \frac{\alpha}{1+b}\ ,$$

   et une équation réciproque du quatrième degré satisfaite par b, que l'on explicitera.
   b/ Montrer que cette équation équivaut à

$$\left(b+\frac{1}{b}\right)^2 + (2-\beta)\left(b+\frac{1}{b}\right) + \alpha^2 - 2\beta = 0. \tag{3}$$

   c/ Comparer les réels $4\beta - 8$ et $(\frac{\beta}{2}+1)^2$. En déduire les relations suivantes :

$$(\Delta_1 < 0 \Rightarrow \Delta_2 > 0) \ \text{ et } \ (\Delta_2 < 0 \Rightarrow \Delta_1 > 0). \tag{4}$$

8. Utiliser les questions précédentes pour rédiger une démonstration du

   Théorème 2.29. *Tout polynôme réciproque du quatrième degré à coefficients réels est factorisable par deux polynômes du second degré, à coefficients réels.*

Exercice 2.30.

Soient α et β des réels. On considère les réels $\Delta_1 = \alpha^2 - 4\beta + 8$ et $\Delta_2 = (\dfrac{\beta}{2}+1)^2 - \alpha^2$.

1. Montrer que $(\dfrac{\beta}{2}+1)^2 - (4\beta - 8)$ est le carré d'un polynôme en β.
2. En déduire les relations suivantes :

$$(\Delta_1 < 0 \Rightarrow \Delta_2 > 0) \ \text{ et } \ (\Delta_2 < 0 \Rightarrow \Delta_1 > 0).$$

3. Peut-on en déduire que Δ_1 et Δ_2 sont toujours de signes contraires ?

Exercice 2.31.

Factoriser le plus possible les polynômes suivants :

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 4x + 1 \qquad g(x) = x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 4x + 1$$