1 Logique

Exercice 1.1 (partiellement résolu)**.**

Soient A, B et C des énoncés logiques.

1. Utiliser la relation $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow ((\text{non } A) \text{ ou } B)$ pour démontrer les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} ((A \text{ ou } B) \Rightarrow C) \quad &\Leftrightarrow \quad ((A \Rightarrow C) \text{ et } (B \Rightarrow C)) \\ ((A \text{ et } B) \Rightarrow C) \quad &\Leftrightarrow \quad ((A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \end{aligned}$$

2. Montrer que les énoncés E et F suivants ne sont pas équivalents :

$$\begin{aligned} E \quad &= \quad (A \text{ et } B) \Rightarrow C \\ F \quad &= \quad (A \Rightarrow C) \text{ et } (B \Rightarrow C) \end{aligned}$$

Solution : 1/ a/ utilisant l'indication et les règles usuelles du cours de Logique, on voit que l'énoncé $(A \text{ ou } B) \Rightarrow C$ équivaut successivement aux énoncés suivants :

$$\begin{aligned} \text{non } (A \text{ ou } B) \text{ ou } C \\ (\text{non } A \text{ et non } B) \text{ ou } C \\ (\text{non } A \text{ ou } C) \text{ et } (\text{non } B \text{ ou } C) \\ (A \Rightarrow C) \text{ et } (B \Rightarrow C) \end{aligned}$$

On démontre de même l'autre équivalence.

2/ montrons que l'implication $E \Rightarrow F$ est fausse en général. Il suffit de donner un contre-exemple avec des énoncés particuliers A, B et C. Cette situation se présente fréquemment dans la vie courante. Il est possible que la **conjonction** de deux conditions A et B soit suffisante pour obtenir C mais qu'aucune des deux conditions A et B, prise **isolément**, ne suffise. Ainsi, si j'ai mon stylo-plume **et** si j'ai de l'encre, alors je peux écrire (dans un certain contexte), mais aucune des conditions “avoir mon stylo-plume” , “avoir de l'encre”, prise isolément n'est suffisante pour me permettre d'écrire.

Pour être plus net, donnons maintenant un exemple mathématique. Le contexte est celui de la Géométrie. On désigne par A, B et I des points. Si on suppose :

$$IA = IB \quad \text{et} \quad I \in [AB]$$

alors I est le milieu du segment $[AB]$. Mais aucune des conditions $IA = IB$, $I \in [AB]$, prise **isolément** n'est suffisante pour conclure que I est le milieu du segment $[AB]$.

Remarque : bien que l'implication directe $E \Rightarrow F$ soit fausse en général, on peut aisément démontrer que l'implication réciproque $F \Rightarrow E$ est toujours vraie.

Exercice 1.2.

Soient A et B des énoncés. Démontrer l'équivalence suivante :

$$(A \text{ ou } B) \Leftrightarrow (A \text{ ou } (\text{non } A \text{ et } B))$$

On pourra utiliser la distributivité.

Exercice 1.3 (partiellement résolu)**.**

On rappelle que $\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble des entiers relatifs. On considère les énoncés suivants

$$\forall a \in \mathbb{Z}, \quad \exists b \in \mathbb{Z}\ , \ a+b=7 \tag{1}$$
$$\exists b \in \mathbb{Z}, \ \forall a \in \mathbb{Z}\ , \ a+b=7 \tag{2}$$

1. L'énoncé (1) est-il vrai ou faux ? Démontrer.
2. L'énoncé (2) est-il vrai ou faux ? Démontrer.

Soit E un énoncé dépendant de deux variables a et b. Soient A et B deux ensembles. On considère les énoncés suivants

$$\forall a \in A, \ \exists b \in B, \ E(a,b) \tag{3}$$
$$\exists b \in B, \ \forall a \in A, \ E(a,b) \tag{4}$$

3. L'implication : (4)$\Rightarrow$(3) est vraie. Le démontrer.
4. L'implication : (3)$\Rightarrow$(4) est fausse en général. Donner plusieurs contre-exemples.

Solution : 1/ intuitivement, l'énoncé (1) signifie que pour tout entier donné a, on peut trouver au moins un entier b, tel que

$$a+b=7 \tag{5}$$

C'est vrai. Pour le prouver, il suffit de considérer l'égalité (5) comme une équation d'inconnue b, et de montrer qu'on peut la résoudre avec b entier. Or l'égalité (5) équivaut à :

$$b = 7-a$$

expression qui est entière pour tout $a \in \mathbb{Z}$. L'énoncé (1) est donc vrai.

2/ l'énoncé (2) signifie qu'il existe au moins un entier b, bien déterminé, tel que l'expression $7-b$ puisse prendre toutes les valeurs entières possibles. C'est évidemment faux, car b étant fixé, $7-b$ ne prend qu'une valeur possible. On peut aussi considérer l'énoncé E, négation de l'énoncé (2). On a :

$$E \ = \ (\forall b \in \mathbb{Z}, \ \exists a \in \mathbb{Z}, \ a+b \neq 7)$$

Cet énoncé est vrai, car il suffit, pour tout $b \in \mathbb{Z}$, de prendre $a=-b$. Et si E est vrai, c'est que (2) est faux.

Nous laissons les deux dernières questions au lecteur.

Exercice 1.4.

1. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que si on a :

   $$\forall x \in \mathbb{R}^*, \ f(x) \times \sin\frac{1}{x} = 0$$

   alors f est la fonction nulle.

2. Soient A et B des énoncés logiques dépendant d'une variable. On considère les énoncés

$$\begin{aligned} E &= \forall x\ (A(x) \Rightarrow B(x)) \\ F &= (\forall x\ A(x)) \Rightarrow (\forall y\ B(y)) \end{aligned}$$

Monter que l'implication $E \Rightarrow F$ est vraie mais que sa réciproque est fausse en général. Pour prouver l'implication directe, on prouvera sa contrapposée.

Exercice 1.5.

Soient E un ensemble, $A(x)$ et $B(x)$ des énoncés arbitraires. On admet l'implication :

$$(\forall x \in E,\ A(x)) \text{ ou } (\forall x \in E,\ B(x)) \Rightarrow (\forall x \in E,\ A(x) \text{ ou } B(x)) \tag{1}$$

ainsi que l'équivalence :

$$(\forall x \in E,\ A(x)) \text{ et } (\forall x \in E,\ B(x)) \Leftrightarrow (\forall x \in E,\ A(x) \text{ et } B(x)) \tag{2}$$

1. Donner un exemple prouvant que la réciproque de la relation (1) est fausse en général.
2. Énoncer les propriétés analogues concernant le quantificateur $\exists$. Les démontrer par des transformations logiques simples portant sur (1) et (2)

Exercice 1.6.

Partie A On note E l'énoncé suivant :

$$\exists x \in \mathbb{N},\ \forall y \in \mathbb{N},\ x \geq y$$

1. Former la négation de E. Montrer que non E est vrai.
2. Rédiger une phrase claire, en français courant et naturel, commençant par “Il n'existe pas ...” et traduisant l'énoncé non E.

Partie B On note E l'énoncé suivant :

$$\forall x \in \mathbb{N}, ((\forall y \in \mathbb{N},\ x \neq 4y) \Rightarrow (\forall z \in \mathbb{N},\ x \neq 2z))$$

1. Former la négation de E. Montrer que non E est vrai.
2. Rédiger une phrase claire, en français courant et naturel, utilisant l'expression “multiple de” et traduisant l'énoncé non E.

Exercice 1.7.

Un missionnaire est attrapé par des cannibales. Leur chef lui annonce qu'il va être mangé tout cuit mais qu'il peut choisir le mode de cuisson, il n'a qu'à parler : s'il dit vrai il sera bouilli, s'il ment il sera rôti. Le missionnaire réfléchit et dit : “ je serai rôti”. Expliquer pourquoi cette phrase lui sauve la vie.

Exercice 1.8.

Il y a trois protagonistes : Émilie, Stéphanie et Jean. Émilie dit : “les deux autres sont des menteurs”. Jean affirme : “deux d'entre nous sont des menteurs”. Mais Stéphanie prétend qu'il n'y en a qu'un qui ment. Qui dit vrai, qui ment ? On pourra examiner les différents cas possibles.

2 Algèbre

2.1 Générale

Exercice 2.1.

Soit le polynôme f défini pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = (4x - 10)^2 - (x+3)(2x-5).$$

1. Factoriser f.
2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
3. Développer, réduire et ordonner f.
4. Calculer, en utilisant à chaque fois, l'expression de f la plus commode, les six nombres suivants :

$$f(1),\ f\left(\frac{1}{2}\right),\ f\left(\frac{-1}{2}\right),\ f(\sqrt{5}),\ f(1+\sqrt{2}),\ f(1-\sqrt{2}).$$

Exercice 2.2.

Soit le polynôme f défini par : $f(x) = (2x+3) \times (5-2x) - (2x+3)^2$.

1. Factoriser f par deux fonctions affines.
2. Développer, réduire et ordonner f.
3. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$
4. Calculer le plus simplement possible les nombres

$$f(0),\ f\left(\frac{3}{4}\right),\ f\left(\frac{-1}{4}\right),\ f\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right),\ f(1-\sqrt{5}),$$

(on donnera les résultats sous la forme d'entiers ou de fractions irréductibles ou, pour les deux derniers calculs, sous la forme $a + b\sqrt{5}$ avec a, b entiers relatifs.)

Exercice 2.3 (résolu)**.**

Soit le polynôme f défini par la formule : $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 9x^2 - 18x - 8$.

1. Factoriser f le plus possible en utilisant des racines évidentes.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x) < 0$.

Solution : 1/ Une racine évidente de f est -1, donc f se factorise par $x+1$. Par identification, on trouve :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (x+1)(3x^3 + x^2 - 10x - 8)$$

On voit que le second facteur admet encore -1 comme racine évidente. Par identification, on trouve :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ 3x^3 + x^2 - 10x - 8 = (x+1)(3x^2 - 2x - 8)$$

Le facteur du second degré s'annulant en 2, on peut le factoriser par $x-2$. Finalement, on trouve :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (x+1)^2(x-2)(3x+4)$$

2/ L'inéquation $f(x) < 0$ est donc équivalente à :

$$(x-2)(3x+4) < 0 \quad \text{et} \quad x+1 \neq 0$$

Le théorème sur le signe du trinôme permet donc de conclure :

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left]\frac{-4}{3};2\right[\setminus \{-1\}$$

L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'inéquation $f(x) < 0$ peut donc s'écrire :

$$\mathcal{S} = \left]\frac{-4}{3};-1\right[\cup]-1;2[$$

Exercice 2.4.

Soient a, b, c et d des réels et soit f le polynôme défini pour tout $x \in \mathbb{R}$ par : $f(x) = x^5 + ax + b$.

1. Déxelopper, réduire et ordonner le produit suivant :

$$(x^2 - 4x + 1) \times (x^3 + cx^2 + dx + b)$$

2. Déterminer les réels a et b de sorte que f soit factorisable par : $x^2 - 4x + 1$.

Exercice 2.5.

Soit le polynôme f défini par la formule : $f(x) = x^5 - 2x^3 - 3x^2 - 2x$.

1. Factoriser f le plus possible en utilisant des racines évidentes.
2. Résoudre l'inéquation $f(x) < 0$.

Exercice 2.6.

Soit le polynôme f défini pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -10x^4 + 17x^3 + 7x^2 - 17x + 3$$

1. Factoriser f le plus possible en utilisant des racines évidentes.
2. Résoudre l'inéquation $f(x) \geq 0$.

Exercice 2.7.

Soit le polynôme f défini pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = 4x^4 - 9x^2 + 6\sqrt{5}.x - 5$$

Les coefficients de f sont donc 4, 0, -9, $6\sqrt{5}$ et -5. On suppose qu'il existe des réels a, b c et d tels qu'on ait la factorisation suivante

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (ax^2 + bx + c)(2x^2 - 3x + d) \tag{3}$$

1. Déterminer un système d'équations satisfaites par a, b c, d et équivalent à la factorisation (1).
2. Résoudre ce système, c'est-à-dire calculer explicitement a, b c et d.
3. En déduire le nombre de racines réelles de f. On justifiera avec soin.
4. Résoudre effectivement l'équation : $f(x) = 0$. Montrer sans calcul qu'on a : $f(-\frac{3}{4}) < 0$.

Exercice 2.8.

Soit le polynôme $f(x) = x^4 - 6x^2 + 8x - 3$.

1. Factoriser f le plus possible en utilisant des racines évidentes.
2. Résoudre l'inéquation $f(x) \leq 0$.

Exercice 2.9.

Soit le polynôme $f(x) = 15x^4 - 2x^3 - 23x^2 + 2x + 8$.

1. Factoriser f le plus possible en utilisant des racines évidentes.
2. Résoudre l'inéquation $f(x) \leq 0$.

Exercice 2.10.

Soit le polynôme $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 5x^2 + 3x + 8$.

1. Factoriser f par $x^2 + x + 1$.
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) > 0$.

Exercice 2.11.

Soit le polynôme f défini pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = 9x^4 - 36x^3 + 53x^2 - 34x + 8.$$

1. Factoriser f le plus possible (on pourra d'abord chercher des racines évidentes).
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) < 0$.

Exercice 2.12.

Soient a, b et c des réels, on suppose $a \neq 0$. On considère le polynôme $f(x) = ax^2 + bx + c$.

1. Démontrer l'implication suivante

$$a \text{ et } c \text{ sont de signes contraires } \Rightarrow f \text{ admet deux racines réelles}$$

2. Réciproque ?

Exercice 2.13.

Soit le polynôme f défini pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = -x^2 + x + 1$$

Déterminer tous les réels x tels qu'on ait : $f(x) > 0$.

Exercice 2.14.

Démontrer la propriété suivante :

$$\forall a, b, x \in \mathbb{R} \ \Big(\big((x^2 + ax + b = 0) \Leftrightarrow (x = 1 \text{ ou } x = 2)\big) \Rightarrow (a = -3 \text{ et } b = 2)\Big)$$

Exercice 2.15.

Soient a et b des réels. On considère le polynôme f défini pour tout $x \in \mathbb{R}$ par la relation

$$f(x) = -2x^4 + 7x^3 - 8x^2 + ax + b$$

1. Déterminer a et b de sorte que f soit factorisable par $x^2 - 3x + 1$.
2. Factoriser alors f explicitement.
3. Déterminer toutes les racines de f.

Exercice 2.16.

Soient a, b et c des réels, et soit le polynôme f défini pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^5 + ax^3 + bx^2 + cx + 6$$

1. Déterminer les valeurs de a, b et c telles que f ait pour racines les nombres -3, 1 et 2. (On pourra résoudre un système linéaire de trois équations à trois inconnues. Pour ce faire, on calculera l'une des inconnues en fonction des deux autres dans une de ces équations, on reportera etc.).
2. Factoriser alors f par $x^3 - 7x + 6$.

Exercice 2.17.

Factoriser le plus possible le polynôme $f(x) = -3x^4 + 16x^3 - 31x^2 + 26x - 8$.

Exercice 2.18.

Déterminer les réels a et b de sorte que le polynôme $x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + ax + b$ soit factorisable par $x^2 - 5x + 6$. On vérifiera que a et b sont des entiers à trois chiffres.

Exercice 2.19.

Déterminer les réels a et b , tels que le polynôme : $x^5 + ax^3 + bx - 4$ soit factorisable par : $x^2 - x + 1$.

Exercice 2.20.

Factoriser le polynôme $x^4 + 1$ par deux facteurs du second degré. Vérifier que ces facteurs ont un discriminant < 0. Comment pouvait-on le prévoir ?

Exercice 2.21.

Soit le polynôme $f(x) = x^4 + bx^2 + c$, où b et c sont des réels quelconques. On note $\Delta = b^2 - 4c$.

1. On suppose $\Delta \geq 0$. Factoriser f par deux polynômes du second degré (on pourra faire le changement de variable $x^2 = t$).
2. On suppose $\Delta < 0$. On a alors $c > 0$ et $b < 2\sqrt{c}$.
   a/ Écrire f comme différence de deux carrés.
   b/ En déduire une factorisation de f par deux polynômes du second degré.

Exercice 2.22.

Déterminer les réels a et b, tels que le polynôme $f(x) = x^5 - x^4 + x^3 + ax + b$ soit factorisable par $x^2 - x + 3$.

Exercice 2.23.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $6x^4 - 11x^3 - 11x^2 + 31x - 15 < 0$.

Exercice 2.24 (Polynômes d'interpolation de Lagrange)**.**

Soient a, b, c trois réels distincts, et A, B, C les fonctions trinômes du second degré définies par

$$A(x) = \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}, \quad B(x) = \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}, \quad C(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}.$$

1. **Calculer** les valeurs prises par ces trois fonctions aux points a, b et c. Présenter les résultats de ces calculs dans un tableau à double entrée

x	a	b	c
$A(x)$			
$B(x)$			
$C(x)$			

Soient α, β, γ trois réels quelconques ; on considère la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \alpha A(x) + \beta B(x) + \gamma C(x).$$

2. Déterminer les images de a, b et c par f (éviter tout nouveau calcul).
3. Déterminer un polynôme f du second degré qui vérifie $f(-1) = 1$, $f(0) = -1$, $f(1) = 2$ (il n'y a aucun calcul, il suffit de choisir judicieusement a, b, c et α, β, γ). Réduire le polynôme f ainsi trouvé.