

Chapitre 1

Symétries de l'espace-temps

Le but de ce chapitre, bien que *stricto sensu* ce ne soit pas un chapitre de supersymétrie, est d'introduire tous les concepts centraux nécessaires pour la construction de modèles supersymétriques. Les sections 1.1 et 1.2 ont trait au groupe et à l'algèbre fondamentale de la relativité. Sa maîtrise permettra d'aborder sagement la structure mathématique qui sous-tend la supersymétrie, à savoir les superalgèbres et en particulier la superalgèbre de Poincaré, dont l'exercice 1.2.2 permettra d'appréhender les représentations. La section 1.3, et en particulier l'exercice 1.3.3, est **incontournable** pour pouvoir comprendre la construction des lagrangiens faite explicitement dans le chapitre 2. Elle permettra également de se familiariser avec la manipulation délicate des indices spinoriels. Cependant, le lecteur pourra admettre ces identités sans compromettre sa compréhension de la supersymétrie.

Il faut également noter que les notations des exercices 1.1.1, 1.1.2, 1.2.1, 1.2.2 et 1.3.1 ne sont pas celles usuellement adoptées en physique. À cet égard, le lecteur pourra consulter la discussion du chapitre 12. Cependant, lorsque dans le chapitre 2, nous considérerons des théories de jauge non-abéliennes, nous retournerons aux notations standards communément choisies en physique et les relations de commutation de l'algèbre feront apparaître explicitement un facteur i .

Notons enfin que dans le texte qui suit, les générateurs de l'algèbre de Lorentz dans la représentation vectorielle (respectivement spinorielle, orbitale) seront notés $J_{\mu\nu}$ (respectivement $\Gamma_{\mu\nu}, L_{\mu\nu}$) alors que $M_{\mu\nu}$ dénotera une représentation générale.

1.1 Groupe et algèbre de Lorentz

1.1.1 Générateurs de l'algèbre de Lorentz – Représentation vectorielle

Soit $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ la métrique de Minkowski et x^μ, y^μ deux quadri-vecteurs. Le produit scalaire entre x et y est défini par $x \cdot y = x^\mu y^\nu \eta_{\mu\nu}$. Une transformation de Lorentz est une transformation linéaire $x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ qui

préserve le produit scalaire entre x et y .

1 Montrer que les matrices Λ satisfont à la condition,

$$\Lambda^t \eta \Lambda = \eta ,$$

où Λ^t est la matrice transposée de la matrice Λ .

2 On considère maintenant une transformation de Lorentz infinitésimale, $\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \varepsilon^\mu{}_\nu$, où $\delta^\mu{}_\nu$ est le symbole de Kronecker et $\varepsilon^\mu{}_\nu \sim 0$.

2.a Montrer que l'on a,

$$\begin{aligned} \varepsilon^\mu{}_\nu &= \frac{1}{2} \omega_{\alpha\beta} (J^{\alpha\beta})^\mu{}_\nu , \\ (J^{\alpha\beta})^\mu{}_\nu &= \eta^{\alpha\mu} \delta^\beta{}_\nu - \eta^{\beta\mu} \delta^\alpha{}_\nu , \end{aligned}$$

avec $\omega_{\alpha\beta} \in \mathbb{R}$. Les paramètres de la transformation sont tels que $\omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\beta\alpha}$.

2.b Montrer que les matrices $J^{\alpha\beta}$ satisfont les relations de commutation,

$$[J^{\alpha\beta}, J^{\gamma\delta}] = \eta^{\beta\gamma} J^{\alpha\delta} - \eta^{\alpha\gamma} J^{\beta\delta} + \eta^{\delta\beta} J^{\gamma\alpha} - \eta^{\delta\alpha} J^{\gamma\beta} .$$

Les matrices $J^{\alpha\beta}$ sont les générateurs de l'algèbre de Lorentz dans la représentation vectorielle. L'algèbre de Lorentz est conventionnellement notée $\mathfrak{so}(1, 3)$.

3 On considère maintenant n transformations successives de paramètres $\frac{1}{n} \omega_{\alpha\beta}$.

3.a Montrer que quand n tend vers l'infini, on obtient la transformation,

$$\Lambda = e^{\frac{1}{2} \omega_{\alpha\beta} J^{\alpha\beta}} .$$

Les matrices Λ de la forme ci-dessus, continuent connectées à l'identité, appartiennent au groupe de Lorentz noté $SO_0(1, 3)$.

3.b Calculer $B_1(\varphi) = \exp(\varphi J^{01})$ et $R_3(\theta) = \exp(\theta J^{12})$. Interpréter $B_1(\varphi)$ et $R_3(\theta)$.

3.c Si $B_1(\varphi)$ est une transformation de Lorentz reliant un référentiel $\mathcal{R}$ à un référentiel $\mathcal{R}'$ animé d'une vitesse u rectiligne et uniforme suivant l'axe Ox^1 , montrer que,

$$u = -c \tanh \varphi .$$

En déduire la loi de composition des vitesses.

1.1.2 Algèbre de Lorentz - Opérateurs de Casimir

On définit $J^i = J^{jk}$ (i, j, k en permutation circulaire) et $K^i = J^{0i}$.

1.a Montrer les relations de commutation (i, j, k en permutation circulaire),

$$[J^i, J^j] = J^k , \quad [J^i, K^j] = K^k , \quad [K^i, K^j] = -J^k .$$

1.b On pose $N^j = \frac{1}{2}(J^j + iK^j)$, $\bar{N}^j = \frac{1}{2}(J^j - iK^j)$, montrer,

$$[N^i, N^j] = N^k , \quad [\bar{N}^i, \bar{N}^j] = \bar{N}^k , \quad [N^i, \bar{N}^j] = 0 .$$

Conclure quant aux représentations de l'algèbre de Lorentz.

Les transformations ci-dessus sont valables dans le complexifié de $\mathfrak{so}(1, 3)$, $\mathfrak{so}(1, 3)_{\mathbb{C}} = \mathfrak{so}(1, 3) \otimes \mathbb{C}$. Les paramètres de la transformation deviennent complexes, c'est-à-dire que maintenant $\mathfrak{so}(1, 3)_{\mathbb{C}}$ est un espace vectoriel complexe et non plus réel, alors que $\mathfrak{so}(1, 3)$ était un espace vectoriel réel. Cela montre donc que $\mathfrak{so}(1, 3)_{\mathbb{C}} \sim \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Si l'on considère la forme réelle correspondant à l'algèbre de Lorentz, il faut se rappeler que N^i et $\bar{N}^i$ sont complexes conjugués l'un de l'autre et donc qu'en fait $\mathfrak{so}(1, 3) \sim \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. En particulier, $\bar{N}^{i*} = N^i$ et la forme réelle est obtenue avec $\frac{1}{2}(N^i + \bar{N}^i) = J^i$ et $\frac{1}{2i}(N^i - \bar{N}^i) = K^i$. Dans la littérature, on voit parfois écrit que $\mathfrak{so}(1, 3) \sim \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$, ce qui n'est pas tout-à-fait exact.

2 Montrer que les opérateurs $Q_1 = \frac{1}{2}J_{\mu\nu}J^{\mu\nu}$ et $Q_2 = \frac{1}{4}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}J^{\mu\nu}J^{\rho\sigma}$, où $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ est le tenseur de Levi-Civita, commutent avec tous les générateurs de l'algèbre de Lorentz (Q_1 et Q_2 sont les opérateurs de Casimir du groupe de Lorentz). Calculer explicitement Q_1 et Q_2 .

1.1.3 $SO_0(1, 3)$ et $SL(2, \mathbb{C})$

Dans cet exercice, on se propose de montrer la relation entre les groupes $SO_0(1, 3)$ et $SL(2, \mathbb{C})$. On introduit les matrices $\sigma^\mu = (\sigma^0, \sigma^i)$ et $\bar{\sigma}^\mu = (\sigma^0, -\sigma^i)$ où σ^i sont les trois matrices de Pauli et σ^0 la matrice identité 2×2 .

1 Soit x^μ les composantes d'un quadrivecteur. On note $X = x^\mu \sigma_\mu$ ($\sigma_\mu = \sigma^\nu \eta_{\nu\mu}$). Exprimer x^μ en fonction de X . Quel est le déterminant de X ? Interpréter.

2 Montrer que si X se transforme sous l'action de $SL(2, \mathbb{C})$ (c'est-à-dire sous l'action des matrices complexes 2×2 de déterminant un) de la façon suivante,

$$X' = M X M^\dagger, \quad M \in SL(2, \mathbb{C}),$$

on a $\det(X') = \det(X)$. En déduire qu'à une telle transformation correspond une transformation de Lorentz Λ dont les éléments de matrice sont donnés par,

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \frac{1}{2} \text{Tr}(\bar{\sigma}^\mu M \sigma_\nu M^\dagger).$$

3 Montrer que la transformation $-M \in SL(2, \mathbb{C})$ conduit à la même transformation de Lorentz.

On dit que $SL(2, \mathbb{C})$ est le groupe de recouvrement universel de $SO_0(1, 3)$ et on a $SO_0(1, 3) = SL(2, \mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$. L'application ci-dessus, de $SL(2, \mathbb{C}) \longrightarrow SO_0(1, 3)$ est un homomorphisme $2 : 1$ — à deux éléments distincts de $SL(2, \mathbb{C})$ correspond un unique élément de $SO_0(1, 3)$. Autrement dit, -1 , 1 étant l'identité, est dans le noyau de l'application précédente.

1.2 Algèbre de Poincaré

1.2.1 Algèbre de Poincaré - Générateurs

Définissons l'élément d'intervalle spatio-temporel $ds^2 = dx^\mu dx^\nu \eta_{\mu\nu}$.

1 Montrer que les transformations les plus générales qui préservent ds^2 sont de la forme,

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu ,$$

où Λ est une transformation de Lorentz et a^μ une translation dans l'espace-temps. Montrer que les transformations ci-dessus forment un groupe, appelé le groupe de Poincaré $ISO(1, 3)$. Nous notons (Λ, a) un élément générique du groupe de Poincaré.

2 On introduit les générateurs des translations P^μ et les générateurs des transformations de Lorentz $J^{\mu\nu}$, dans la représentation vectorielle (voir exercice 1.1.1). Calculer,

$$(\Lambda, a)J^{\mu\nu}(\Lambda, a)^{-1} \text{ et } (\Lambda, a)P^\mu(\Lambda, a)^{-1}.$$

En déduire que l'algèbre de Poincaré (noté $\mathfrak{iso}(1, 3)$) s'écrit,

$$\begin{aligned} [J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] &= \eta^{\nu\sigma} J^{\rho\mu} - \eta^{\mu\sigma} J^{\rho\nu} + \eta^{\nu\rho} J^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho} J^{\nu\sigma} , \\ [J^{\mu\nu}, P^\rho] &= \eta^{\nu\rho} P^\mu - \eta^{\mu\rho} P^\nu , \\ [P^\mu, P^\nu] &= 0 . \end{aligned}$$

3 Montrer que $L_{\mu\nu} = x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu$ et $P_\mu = -\partial_\mu$ engendrent une représentation de l'algèbre de Poincaré.

4 Soit $W_\mu = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} P^\nu L^{\rho\sigma}$ l'opérateur de Pauli-Lubanski. Calculer les commutateurs $[M^{\mu\nu}, W^\alpha]$ et $[P^\mu, W^\nu]$. En déduire que $P_\mu P^\mu$ et $W_\mu W^\mu$ sont des opérateurs de Casimir, *i.e.*, commutent avec tous les générateurs de l'algèbre de Poincaré.

1.2.2 Représentations du groupe de Poincaré - Petit groupe

Dans cet exercice, nous nous contenterons de mettre en évidence les petits groupes pour les particules massives et non-massives. On notera de manière générique $M^{\mu\nu}$ les générateurs de l'algèbre de Lorentz.

1 Que peut-on conclure du fait que les opérateurs P^μ commutent ? Si l'on considère maintenant un vecteur propre de P^μ , déterminez l'action de l'opérateur P^μ sur son transformé de Lorentz.

2 Montrer que les représentations sont caractérisées par les valeurs propres de $P_\mu P^\mu$. **On rappelle que l'impulsion est $-iP_\mu$ et que donc,**

$$-m^2 = P_\mu P^\mu ,$$

où m est la masse de la particule.

3 On se place dans le cas massif, *i.e.*, $m \neq 0$. Quel est le petit groupe? Que devient $W_\mu W^\mu$? Conclure.

4 Montrer que le petit groupe pour les particules non-massives est $ISO(2)$, c'est-à-dire le groupe des rotations-translations en deux dimensions.

Le petit groupe $ISO(2)$ étant non-compact, ses représentations unitaires sont de dimension infinie. Comme on préfère en général avoir des représentations de dimension finie, on représentera les générateurs des translations T_1, T_2 par zéro, et le petit groupe, appelé petit groupe court, deviendra dans ce cas $SO(2)$. Il existe cependant des représentations unitaires pour lesquelles T_1, T_2 ne sont pas nuls; on parle alors de spin continu.

On se place dans le cas du petit groupe court $SO(2)$. Que devient $W_\mu W^\mu$? Conclure.

1.3 Spineurs

1.3.1 Spineurs de Dirac et de Weyl

Soient $\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}$ les matrices de Dirac. On rappelle que les matrices σ^μ et $\bar{\sigma}^\mu$ ont été introduites dans l'exercice 1.1.3.

1 Montrer que les matrices γ engendrent l'algèbre de Clifford,

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} ,$$

et en déduire que les matrices $\gamma^{\mu\nu} = \frac{1}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ satisfont l'algèbre de Lorentz. Un spineur de Dirac, par définition, se transforme sous le groupe de Lorentz à partir des matrices $\gamma^{\mu\nu}$; un tel spineur est noté ψ_D .

2 La représentation ci-dessus est-elle irréductible?

Indication : On considèrera la matrice $\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$.

3 On définit maintenant,

$$\begin{pmatrix} \lambda_L \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\psi_D \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\chi}_R \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\psi_D .$$

Montrer que λ_L (respectivement $\bar{\chi}_R$) se transforme sous le groupe de Lorentz à partir des matrices $\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{4}(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu)$ (respectivement $\bar{\sigma}^{\mu\nu} = \frac{1}{4}(\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu - \bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu)$).

4 On note $M = \exp(\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu})$ et $\bar{M} = \exp(\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}\bar{\sigma}^{\mu\nu})$. Montrer que,

$$M = \exp\left(-\frac{i}{2}\vec{\theta} \cdot \vec{\sigma} - \frac{1}{2}\vec{\varphi} \cdot \vec{\sigma}\right) \quad \text{et} \quad \bar{M} = \exp\left(-\frac{i}{2}\vec{\theta} \cdot \vec{\sigma} + \frac{1}{2}\vec{\varphi} \cdot \vec{\sigma}\right) ,$$

où $\theta_i = \omega_{jk}$ (i, j, k sont en permutation circulaire) et $\varphi_i = \omega_{0i}$.

5 En déduire que pour la représentation spécifiée par les matrices $\sigma^{\mu\nu}$ (respectivement $\bar{\sigma}^{\mu\nu}$), on a $N^i = -\frac{i}{2}\sigma^i$ et $\bar{N}^i = 0$ (respectivement $N^i = 0$, et $\bar{N}^i = -\frac{i}{2}\sigma^i$).

Les notations utilisées, sont celles de l'exercice 1.1.2. Les matrices ci-dessus engendrent les représentations spinorielles de l'algèbre de Lorentz (spineurs de Weyl); les spineurs se transformant à partir des matrices $\sigma^{\mu\nu}$ (respectivement $\bar{\sigma}^{\mu\nu}$) sont appelés spineurs gauchers (respectivement spineurs droitiers), ils sont dans la représentation $(\frac{1}{2}, 0)$ (respectivement $(0, \frac{1}{2})$) du groupe de Lorentz (voir la forme des matrices N^i et $\bar{N}^i$ et les résultats standards de $SU(2)$).

6 Montrer que la matrice complexe conjuguée de M , notée M^* , est équivalente à $\bar{M}$, c'est-à-dire qu'il existe une matrice P telle que,

$$\bar{M} = PM^*P^{-1}.$$

En déduire que les spineurs gauchers sont complexes conjugués des spineurs droitiers.

On dit que les représentations $(\frac{1}{2}, 0)$ et $(0, \frac{1}{2})$ de $\mathfrak{so}(1, 3)$ sont isomorphes aux représentations $\underline{2}$ (représentation complexe de dimension 2 de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$) et $\underline{2}^*$ (la complexe conjuguée de $\underline{2}$).

1.3.2 Spineurs de Majorana

On considère les matrices de Dirac sous la forme introduite dans l'exercice 1.3.1.

1 On note γ^t (respectivement $\gamma^*, \gamma^\dagger$) la matrice transposée (respectivement complexe conjuguée, hermitique conjuguée) de la matrice γ , déterminer les matrices $A_\pm, B_\pm$ et $C_\pm$ telles que,

$$\begin{aligned}\gamma^{\mu\dagger} &= \pm A_\pm \gamma^\mu A_\pm^{-1}, \\ \gamma^{\mu*} &= \pm B_\pm \gamma^\mu B_\pm^{-1}, \\ \gamma^{\mu t} &= \pm C_\pm \gamma^\mu C_\pm^{-1}.\end{aligned}$$

Quelle relation a-t-on entre les matrices A, B, C ?

2 On choisit conventionnellement $B_- = i\gamma^2$ et $C_- = -i\gamma^0\gamma^2$ (et on omet l'indice $-$) de sorte que $\gamma^{\mu*} = -B\gamma^\mu B^{-1}$ et $\gamma_\mu^t = -C\gamma^\mu C^{-1}$. Un spineur de Majorana ψ_M est un spineur pour lequel $\psi_M^* = B\psi_M$.

2.a Montrer qu'un tel spineur existe et est de la forme,

$$\psi_M = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \bar{\psi}_R = -i\sigma^2\psi_L^* \end{pmatrix}.$$

2.b On introduit le conjugué de Dirac¹, $\bar{\psi}_D = \psi_D^\dagger \gamma_0$, et le spineur conjugué de charge $\psi_D^c = C\bar{\psi}_D^t$. Montrer que pour un spineur de Majorana, $\psi_M^c = \psi_M$.

3 On introduit maintenant la notation de van der Waerden pour les spineurs gauchers et droitiers, $\psi_L \rightarrow \psi_{L\alpha}$ et $\bar{\psi}_R \rightarrow \bar{\psi}_{R\dot{\alpha}}$ (voir conventions en fin d'ouvrage).

3.a Justifier les notations pour un spineur de Dirac,

$$\psi_D = \begin{pmatrix} \lambda_\alpha \\ \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}, \text{ avec } \chi^\alpha = (\bar{\chi}^{\dot{\alpha}})^*.$$

Comment s'écrit un spineur de Majorana dans ces notations ?

3.b Montrer que la structure indicielle des matrices σ^μ et $\bar{\sigma}^\mu$ est,

$$\sigma^\mu \longrightarrow \sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}, \quad \bar{\sigma}^\mu \longrightarrow \bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\alpha}.$$

3.c Quels sont les indices spinoriels des matrices $\sigma^{\mu\nu}$ et $\bar{\sigma}^{\mu\nu}$? Est-ce cohérent ?

1.3.3 Identités fondamentales

Cet exercice est technique et utile pour démontrer certains résultats de supersymétrie (pour les notations, voir chapitre 11 en fin d'ouvrage). Soient ψ, λ, χ trois spineurs gauchers et $\bar{\lambda}, \bar{\chi}$ deux spineurs droitiers. On suppose que les composantes des spineurs anticommulent. On note $\psi \cdot \lambda = \psi^\alpha \lambda_\alpha$ et $\bar{\psi} \cdot \bar{\lambda} = \bar{\psi}_{\dot{\alpha}} \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}$.

1 Montrer que $\psi_\alpha \lambda^\alpha$ et $\bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}$ sont des scalaires et que $\psi^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}$ est un vecteur.

2 Montrer les identités suivantes :

2.a $\psi \cdot \lambda = \lambda \cdot \psi$.

2.b $(\psi \cdot \lambda)^\dagger = \bar{\psi} \cdot \bar{\lambda}$.

2.c $\bar{\sigma}^{\mu\dot{\beta}\beta} = \sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}} \varepsilon^{\alpha\beta} \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$.

2.d $\bar{\psi} \bar{\sigma}^\mu \lambda = (\bar{\lambda} \bar{\sigma}^\mu \psi)^\dagger = -\lambda \sigma^\mu \bar{\psi}$.

2.e $\psi \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu \lambda = \lambda \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu \psi$.

2.f $\chi_\alpha (\psi \cdot \lambda) = -\psi_\alpha (\chi \cdot \lambda) - \lambda_\alpha (\chi \cdot \psi)$ (identité de Fierz).

2.g $\frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \sigma^{\rho\sigma} = -i \sigma_{\mu\nu}$, $\frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \bar{\sigma}^{\rho\sigma} = i \bar{\sigma}_{\mu\nu}$.

2.h $\bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu \bar{\sigma}^\rho + \bar{\sigma}^\rho \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu = 2(\eta^{\mu\nu} \bar{\sigma}^\rho + \eta^{\rho\nu} \bar{\sigma}^\mu - \eta^{\mu\rho} \bar{\sigma}^\nu)$.

2.i $\bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu \bar{\sigma}^\rho - \bar{\sigma}^\rho \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu = 2i \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \bar{\sigma}_\sigma$.

2.j $\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\sigma}_\mu^{\dot{\beta}\beta} = 2\delta_\alpha^\beta \delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}}$, $\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}} \sigma_\mu^{\beta\dot{\beta}} = 2\varepsilon_{\alpha\beta} \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$.

3 Nous allons montrer les identités utilisées dans la construction du superspace dans les exercices 2.3.2, 2.3.3, 2.3.4 et 2.3.5. On introduit θ^α et $\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}$ ainsi que ∂_α et

¹Dans l'exercice 1.3.1 les spineurs droitiers sont notés $\bar{\psi}_R$ alors que dans cet exercice nous notons l'opération de conjugaison de Dirac $\bar{\psi}_D$. Bien que les notations (*bar*) soient similaires, ces deux opérations sont distinctes. En outre, il ne subsiste aucune ambiguïté car la première agit sur des spineurs à deux composantes alors que la seconde sur des spineurs à quatre composantes.

$\bar{\partial}_{\dot{\alpha}}$ satisfaisant $\{\partial_{\alpha}, \theta^{\beta}\} = \delta_{\alpha}^{\beta}$ et $\{\bar{\partial}_{\dot{\alpha}}, \bar{\theta}^{\dot{\beta}}\} = \delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}}$ (on ne donne que les anticommutateurs non-nuls). Montrer les identités suivantes :

- 3.a** $\theta^{\alpha}\theta^{\beta} = -\frac{1}{2}\theta \cdot \theta \varepsilon^{\alpha\beta}$, $\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\beta}} = \frac{1}{2}\bar{\theta} \cdot \bar{\theta} \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$, $\theta^{\alpha}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} = \frac{1}{2}\theta \sigma^{\mu}\bar{\theta} \bar{\sigma}_{\mu}^{\dot{\alpha}\alpha}$.
- 3.b** $\partial \cdot \partial (\theta \cdot \theta) = -4$, $\bar{\partial} \cdot \bar{\partial} (\bar{\theta} \cdot \bar{\theta}) = -4$.
- 3.c** $\psi_1 \cdot \theta \psi_2 \cdot \theta = -\frac{1}{2}\theta \cdot \theta \psi_1 \cdot \psi_2$, $\theta \cdot \lambda \bar{\theta} \cdot \bar{\varepsilon} = -\frac{1}{2}\theta \sigma^{\mu}\bar{\theta} \bar{\varepsilon} \bar{\sigma}_{\mu} \lambda$.
- 3.d** $\theta \sigma^{\mu} \bar{\varepsilon} \theta \cdot \psi = -\frac{1}{2}\theta \cdot \theta \psi \sigma^{\mu} \bar{\varepsilon}$, $\varepsilon \sigma^{\mu} \bar{\theta} \bar{\theta} \cdot \bar{\psi} = -\frac{1}{2}\bar{\theta} \cdot \bar{\theta} \varepsilon \sigma^{\mu} \bar{\psi}$.
- 3.e** $\varepsilon \sigma^{\mu} \bar{\theta} \theta \cdot \psi = -\frac{1}{2}\theta \sigma^{\mu} \bar{\theta} \varepsilon \cdot \psi - \theta \sigma_{\nu} \bar{\theta} \varepsilon \sigma^{\mu\nu} \psi$,
 $\theta \sigma^{\mu} \bar{\varepsilon} \bar{\theta} \cdot \bar{\psi} = -\frac{1}{2}\theta \sigma^{\mu} \bar{\theta} \bar{\varepsilon} \cdot \bar{\psi} + \theta \sigma_{\nu} \bar{\theta} \bar{\varepsilon} \bar{\sigma}^{\mu\nu} \bar{\psi}$,
 $\theta \sigma^{\mu} \bar{\theta} \theta \cdot \psi = -\frac{1}{2}\theta \cdot \theta \psi \sigma^{\mu} \bar{\theta}$.
- 3.f** $\theta \sigma^{\mu} \bar{\varepsilon} \theta \sigma^{\nu} \bar{\theta} = \frac{1}{2}\theta \cdot \theta \bar{\theta} \cdot \bar{\varepsilon} \eta^{\mu\nu} + \theta \cdot \theta \bar{\theta} \bar{\sigma}^{\nu\mu} \bar{\varepsilon}$,
 $\theta \sigma^{\mu} \bar{\theta} \theta \sigma^{\nu} \bar{\theta} = \frac{1}{2}\theta \cdot \theta \bar{\theta} \cdot \bar{\theta} \eta^{\mu\nu}$.
- 3.g** $(\sigma^{\mu} \bar{\theta})_{\alpha} \theta \sigma^{\nu} \bar{\theta} = \frac{1}{2}\bar{\theta} \cdot \bar{\theta} (\sigma^{\mu} \bar{\sigma}^{\nu} \theta)_{\alpha}$.
- 3.h** $(\sigma^{\mu} \bar{\theta})_{\alpha} \bar{\theta} \cdot \bar{\lambda} = -\frac{1}{2}\bar{\theta} \cdot \bar{\theta} (\sigma^{\mu} \bar{\lambda})_{\alpha}$.
- 3.i** $(\theta \sigma^{\mu} \bar{\sigma}^{\nu})^{\alpha} (\sigma^{\rho} \bar{\sigma}^{\sigma} \theta)_{\alpha} = \frac{1}{2}\theta \cdot \theta \text{Tr}(\sigma^{\mu} \bar{\sigma}^{\nu} \sigma^{\rho} \bar{\sigma}^{\sigma})$
 $= \theta \cdot \theta (\eta^{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma} + \eta^{\rho\nu} \eta^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} - i \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma})$.
- 3.j** $\psi \sigma^{\mu\nu} \lambda = -\lambda \sigma^{\mu\nu} \psi$.

1.3.4 Covariants bilinéaires de Dirac

Le but de cet exercice est d'établir quelques propriétés sur les spineurs à quatre composantes.

1 Soit ψ_D un spineur de Dirac. On introduit les fonctions bilinéaires en ψ_D , $\bar{\psi}_D \psi_D$, $\bar{\psi}_D \gamma_5 \psi_D$, $\bar{\psi}_D \gamma_{\mu} \psi_D$, $\bar{\psi}_D \gamma_5 \gamma_{\mu} \psi_D$ et $\bar{\psi}_D \gamma^{\mu\nu} \psi_D$. Écrire tous les bilinéaires dans les notations de van der Waerden (c'est-à-dire à partir des spineurs à deux composantes).

2 Soient Ψ_1 et Ψ_2 deux spineurs de Majorana. Montrer que $\bar{\Psi}_1 \gamma_{\mu} \Psi_2$ et $\bar{\Psi}_1 \gamma_{\mu\nu} \Psi_2$ sont antisymétriques en 1, 2 alors que $\bar{\Psi}_1 \Psi_2$, $\bar{\Psi}_1 \gamma_5 \Psi_2$ et $\bar{\Psi}_1 \gamma_5 \gamma_{\mu} \Psi_2$ sont symétriques en 1, 2.

3 On introduit,

$$\gamma^{\mu\nu\rho} = \frac{1}{6}(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\rho} + \gamma^{\nu}\gamma^{\rho}\gamma^{\mu} + \gamma^{\rho}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} - \gamma^{\mu}\gamma^{\rho}\gamma^{\nu} - \gamma^{\nu}\gamma^{\mu}\gamma^{\rho} - \gamma^{\rho}\gamma^{\nu}\gamma^{\mu}) .$$

Montrer que,

$$\gamma^{\mu\nu\rho} = i \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_5 \gamma_{\sigma} .$$

Montrer également que,

$$-\frac{i}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_{\mu\nu} \gamma_5 = \gamma^{\rho\sigma} ,$$

où $\gamma^{\mu\nu} = \frac{1}{4}[\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}]$.