

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Motivation et objectifs</b>	<b>9</b>
1.1	Intégrale des fonctions continues . . . . .	9
1.2	Insuffisance de l'intégrale des fonctions continues . . . . .	11
1.3	Les probabilités . . . . .	14
1.4	Objectifs . . . . .	15
1.5	Structure du cours . . . . .	15
1.6	Exercices . . . . .	16
<b>2</b>	<b>Tribus et mesures</b>	<b>35</b>
2.1	Introduction . . . . .	35
2.2	Tribu ou $\sigma$ -algèbre . . . . .	36
2.3	Mesure, probabilité . . . . .	41
2.4	Mesure signée . . . . .	48
2.5	La mesure de Lebesgue sur la tribu des boréliens . . . . .	52
2.6	Indépendance et probabilité conditionnelle . . . . .	63
2.7	Exercices . . . . .	69
<b>3</b>	<b>Fonctions mesurables, variables aléatoires</b>	<b>109</b>
3.1	Introduction, topologie sur $\overline{\mathbb{R}}_+$ . . . . .	109
3.2	Fonctions étagées . . . . .	111
3.3	Fonctions mesurables et variables aléatoires . . . . .	113
3.4	Mesure image, loi d'une v.a., v.a. indépendantes . . . . .	120
3.5	Convergence p.p., p.s., en mesure, en probabilité . . . . .	123
3.6	Exercices . . . . .	127
<b>4</b>	<b>Fonctions intégrables</b>	<b>157</b>
4.1	Intégrale d'une fonction étagée positive . . . . .	158
4.2	Intégrale d'une fonction mesurable positive . . . . .	160
4.3	Convergence monotone et lemme de Fatou . . . . .	165
4.4	Mesures et probabilités de densité . . . . .	168

TABLE DES MATIÈRES

4.5	L'espace $\mathcal{L}^1$ des fonctions intégrables . . . . .	170
4.6	L'espace $L^1$ . . . . .	174
4.7	Théorèmes de convergence dans $L^1$ . . . . .	177
4.8	Continuité et dérivabilité sous le signe d'intégration . . . . .	183
4.9	Espérance et moments des variables aléatoires . . . . .	185
4.10	Espace $L^1_{\mathbb{C}}(E, T, m)$ et espace $L^1_{\mathbb{R}^N}(E, T, m)$ . . . . .	189
4.11	Exercices . . . . .	192
<b>5</b>	<b>Intégrale sur les boréliens de <math>\mathbb{R}</math></b> . . . . .	<b>243</b>
5.1	Intégrale de Lebesgue et intégrale des fonctions continues . . . . .	243
5.2	Mesures abstraites et mesures de Radon . . . . .	245
5.3	Changement de variable, densité et continuité . . . . .	252
5.4	Intégrales impropres des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ . . . . .	256
5.5	Exercices . . . . .	256
<b>6</b>	<b>Les espaces <math>L^p</math></b> . . . . .	<b>275</b>
6.1	Définitions et premières propriétés . . . . .	275
6.2	Analyse hilbertienne et espace $L^2$ . . . . .	288
6.3	Dualité dans les espaces $L^p$ , $1 \leq p \leq \infty$ . . . . .	310
6.4	Convergence faible, faible-*, étroite, en loi . . . . .	319
6.5	Exercices . . . . .	330
<b>7</b>	<b>Produits d'espaces mesurés</b> . . . . .	<b>411</b>
7.1	Motivation . . . . .	411
7.2	Mesure produit . . . . .	412
7.3	Théorèmes de Fubini-Tonelli et Fubini . . . . .	417
7.4	Mesure de Lebesgue sur la tribu des boréliens de $\mathbb{R}^N$ . . . . .	422
7.5	Convolution . . . . .	425
7.6	Formules de changement de variable . . . . .	430
7.7	Exercices . . . . .	433
<b>8</b>	<b>Densité, séparabilité et compacité</b> . . . . .	<b>465</b>
8.1	Théorèmes de densité pour les espaces $L^p(\Omega)$ . . . . .	465
8.2	Séparabilité de $L^p(\Omega)$ . . . . .	470
8.3	Compacité dans les espaces $L^p(\Omega)$ . . . . .	471
8.4	Compacité faible-* . . . . .	472
8.5	Exercices . . . . .	475
<b>9</b>	<b>Vecteurs aléatoires</b> . . . . .	<b>487</b>
9.1	Définition, propriétés élémentaires . . . . .	487
9.2	Indépendance . . . . .	493

## TABLE DES MATIÈRES

9.3	Vecteurs gaussiens . . . . .	497
9.4	Exercices . . . . .	498
<b>10</b>	<b>Transformation de Fourier</b>	<b>513</b>
10.1	Introduction et notations . . . . .	513
10.2	Transformation de Fourier dans $L^1$ . . . . .	514
10.3	Transformée de Fourier d'une mesure signée . . . . .	518
10.4	Transformation de Fourier dans $L^2$ . . . . .	521
10.5	Résolution d'une E.D.O ou d'une E.D.P . . . . .	523
10.6	Fonction caractéristique d'un vecteur aléatoire . . . . .	524
10.7	Exercices . . . . .	531
<b>11</b>	<b>Espérance conditionnelle et martingales</b>	<b>549</b>
11.1	Espérance conditionnelle . . . . .	549
11.2	Martingales . . . . .	558
11.3	Exercices . . . . .	561
	<b>Références</b>	<b>595</b>
	<b>Index</b>	<b>596</b>