Chapitre 1

Méthodes pour bien démarrer

On ose... Commençons ce livre de deuxième année avec des révisions de première année !

- **Pourquoi ?**
  Tout simplement parce que $62,3\%$ en moyenne des sujets d'écrit sont constitués de questions relevant uniquement de la première année (cela monte certaine année à 100%, c'est le cas de l'épreuve Modélisation Mathématiques et Informatique de 2018). Signalons aussi qu'un certains nombre de chapitres de BCPST1 ne sont pas approfondis en deuxième année et sont donc peu évoqués par votre professeur de deuxième année. Du coup, vous avez tendance à ne pas assez les réviser ! Les équadiffs, par exemple, tombent régulièrement et ne sont qu'au programme de la première année.
- **Comment ?**
  À chaque chapitre de première année non abordé en deuxième année, on rappelle rapidement ce que vous devez savoir faire. On vous donne après un exercice corrigé sur lequel vous pouvez vous tester. À la fin, on a pris des exos de ces différents chapitres de nouveau pour l'entraînement. Si vous ne parvenez pas à les faire, alors sans aucune hésitation, vous devez absolument vous replonger dans votre cours de première année.

1.1 Révisons efficacement complexes et trigo

MÉTHODE 1 : Résoudre des équations trigo

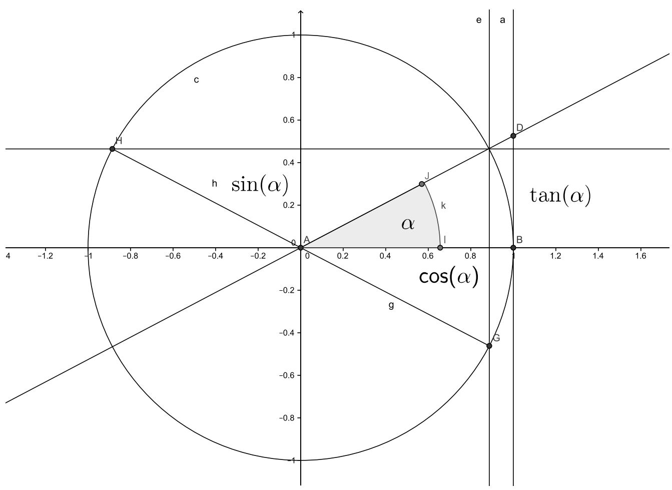
■ **Principe :**
Résoudre des équations trigo ne devrait pas vous poser trop de problèmes, l'idée est de se ramener à une de ces trois équations qu'on sait résoudre :

1. $\cos(\theta) = \cos(\phi) \Leftrightarrow \theta \equiv \phi[2\pi]$ ou $\theta \equiv -\phi[2\pi]$
2. $\sin(\theta) = \sin(\phi) \Leftrightarrow \theta \equiv \phi[2\pi]$ ou $\theta \equiv \pi - \phi[2\pi]$
3. $\tan(\theta) = \tan(\phi) \Leftrightarrow \theta \equiv \phi[\pi]$

Disons simplement qu'on essaye de toujours revenir à une égalité entre deux cos ou deux sin ou deux tan. Si jamais vous avez un mélange de cos et du sin, sachez que vous pouvez passer de l'un à l'autre en faisant un déphasage de $\frac{\pi}{2}$:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin(\theta) \text{ et } \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos(\theta).$$

■ **Mise en garde :**
Attention, on des modulos 2π pour cos et sin et modulo π pour tan. Ne pas oublier aussi à chaque fois la deuxième possibilité. $\cos(\theta) = \cos(\phi)$ n'équivaut pas à $\theta \equiv \phi[2\pi]$ mais à $\theta \equiv \phi[2\pi]$ ou $\theta \equiv -\phi[2\pi]$. La deuxième possibilité se retrouve très simplement en observant un cercle trigo :



1. Pour le cos, on remarque que $\cos(\alpha)$ et $\cos(-\alpha)$ valent la même chose. On a tracé une droite verticale sur le cercle pour le voir.
2. Pour le sin, on remarque que $\sin(\alpha)$ et $\sin(\pi - \alpha)$ valent la même chose. On a tracé une droite horizontale sur le cercle pour le voir.
3. Pour le tan, on remarque que $\tan(\alpha)$ et $\tan(\pi + \alpha)$ valent la même chose.

■ **Cas particulier :**
Pour résoudre des équations trigo, il est classique de couper les angles en deux. On vous rappelle les formules d'angle moitié du cos et du sin :

$$\begin{aligned}\cos(2\theta) &= \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)\\ &= 2\cos^2(\theta) - 1\\ &= 1 - 2\sin^2(\theta)\end{aligned} \qquad \sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$$

et, en posant $t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$, on obtient celles liées à la tangente de l'angle moitié :

$$\sin(\theta) = \frac{2t}{1+t^2}, \cos(\theta) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \text{ et } \tan(\theta) = \frac{2t}{1-t^2}.$$

■ ***Exemple:***

Résoudre l'équation suivante d'inconnue x réel :

$$\cos^2(x) - \sin^2(x) = \sin(2x) + 1.$$

Pour tout réel x, on a :

$$\begin{aligned} \cos^2(x) - \sin^2(x) = \sin(2x) + 1 &\iff 1 - 2\sin^2(x) = 2\sin(x)\cos(x) + 1 \\ &\iff \sin(x) \times (\cos(x) + \sin(x)) = 0 \\ &\iff \sin(x) = 0 \text{ ou } \cos(x) = -\sin(x) \\ &\iff x \equiv 0[\pi] \text{ ou } x \equiv -\frac{\pi}{4}[\pi] \end{aligned}$$

MÉTHODE 2 : Savoir factoriser

■ **Rappel :**
En développant, vous vous rendez compte sans difficulté que les égalités suivantes sont vraies :

- $\exp(ip) + \exp(iq) = 2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\exp\left(i\frac{p+q}{2}\right)$.
- $\exp(ip) - \exp(iq) = 2i\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\exp\left(i\frac{p+q}{2}\right)$.

En identifiant parties réelles et imaginaires, on obtient les formules de factorisation (qui ne sont pas à connaître par cœur mais à savoir retrouver rapidement à l'aide de la formule précédente) :

- $\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$
- $\cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$
- $\sin(p) + \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$
- $\sin(p) - \sin(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$

■ **Cas d'utilisation :**
Factoriser, cela est utile quand on résout une équation ou quand on cherche un signe. Autant dire que dans ces deux cas, on n'apprécie guère d'avoir une somme ! Bref, ces formules de factorisation, bien qu'elles ne soient pas à apprendre par cœur, sont à savoir retrouver très très rapidement !

■ ***Exemple:***

> *Résoudre l'équation* $\sin(x)+\sin(2x)+\sin(3x)=0$ *d'inconnue* x *réel.*
>
> À l'aide des formules de factorisations, on obtient :
>
> $$\sin(x)+\sin(3x)=2\sin\left(\frac{x+3x}{2}\right)\cos\left(\frac{3x-x}{2}\right)$$
>
> Chouette, du $\sin(2x)$, on en déduit :
>
> $$\begin{aligned}\sin(x)+\sin(2x)+\sin(3x)=0 &\iff 2\sin(2x)\cos(x)+\sin(2x)=0\\ &\iff \sin(2x)\times\left(\cos(x)+\frac{1}{2}\right)=0\\ &\iff \sin(2x)=0 \text{ ou } \cos(x)=-\frac{1}{2}\\ &\iff x\equiv 0\left[\frac{\pi}{2}\right] \text{ ou } x\equiv\pm\frac{2\pi}{3}\,[2\pi]\end{aligned}$$

MÉTHODE 3 : Savoir linéariser

■ **Rappel :**
On va avoir besoin de deux formules pour cette méthode :

1. **Les formules d'Euler :**
   Pour tout réel θ, on a :

$$\cos(\theta)=\frac{\exp(i\theta)+\exp(-i\theta)}{2} \text{ et } \sin(\theta)=\frac{\exp(i\theta)-\exp(-i\theta)}{2i}.$$

2. **La formule du binôme de Newton :**
   Soient z_1 et z_2 deux complexes. Pour entier naturel n, on a :

$$(z_1+z_2)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}z_1^k z_2^{n-k}.$$

■ **Principe :**
Le but est d'exprimer des puissances de cos et de sin en fonction de $\cos(k\theta)$ et de $\sin(k\theta)$. Il suffit pour cela de suivre ces deux étapes :

- **Étape 1 :**
  On remplace toutes les fonctions trigos grâce aux formules d'Euler puis on développe avec la formule du binôme de Newton.
- **Étape 2 :**
  Dans la grosse somme obtenue, on regroupe ensemble les $\exp(ik\theta)$ avec leurs amis, les $\exp(-ik\theta)$, et, enfin, on utilise de nouveau les formules d'Euler pour repasser en cos et sin.

Les calculs sont souvent pénibles mais en étant bien organisé, cela ne pose pas trop de souci ! Linéariser, c'est bien utile quand on a besoin d'une somme. Typiquement, quand on cherche à intégrer une puissance de cos ou de sin !

■ ***Exemple:***

Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 t \, dt.$

Déjà, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 t \, dt$ existe par continuité de $\cos^6$ sur $\mathbb{R}$ et donc sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ en particulier. D'après les formules d'Euler, pour tout réel t, on a :

$$\begin{aligned}
\cos^6(t) &= \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2}\right)^6 \\
&= \frac{1}{2^5} \times \left(\frac{e^{6it} + 6e^{4it} + 15e^{2it} + 20 + 15e^{-2it} + 6e^{-4it} + e^{-6it}}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2^5} \times \left(\frac{e^{6it} + e^{-6it}}{2} + 6 \times \frac{e^{4it} + e^{-4it}}{2} + 10 + 15 \times \frac{e^{2it} + e^{-2it}}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2^5} \times (\cos(6t) + 6\cos(4t) + 15\cos(2t) + 10)\,.
\end{aligned}$$

D'où, par linéarité de l'intégration :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 t dt &= \left[\frac{\sin(6t)}{192}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + 6\left[\frac{\sin(4t)}{128}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + 15\left[\frac{\sin(2t)}{64}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{10\pi}{64} \\
&= \frac{5\pi}{32}.
\end{aligned}$$

MÉTHODE 4 : Calculer $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$

■ **Principe :**

Pour expliciter $\cos(n\theta)$ ou $\sin(n\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$, on suit bien gentiment ces deux étapes :

- On développe $(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n$ en utilisant la formule du binôme de Newton.
- Enfin, comme $(\cos\theta + i\sin\theta)^n$ est $\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$ (formule de De Moivre), il suffit de chercher la partie réelle si on veut $\cos(n\theta)$ et la partie imaginaire si on veut $\sin(n\theta)$.

■ ***Exemple:***

Appliquer le principe précédent avec $\cos(4\theta)$.

D'après la formule du binôme de Newton, $(\cos\theta + i\sin\theta)^4$ est :

$$\cos^4(\theta) + 4i\cos^3(\theta)\sin(\theta) - 6\cos^2(\theta)\sin^2(\theta) - 4i\cos(\theta)\sin^3(\theta) + \sin^4(\theta).$$

En identifiant la partie réelle, d'après la formule de De Moivre, on a :

$$\cos(4\theta) = \cos^4(\theta) - 6\cos^2(\theta)\sin^2(\theta) + \sin^4(\theta).$$

MÉTHODE 5 : Simplifier $A\cos(\theta) + B\sin(\theta)$

■ **Principe :**
On factorise par $\sqrt{A^2+B^2}$. Si A et B ne sont pas tous les deux nuls, on écrit :

$$A\cos(\theta) + B\sin(\theta) = \sqrt{A^2+B^2} \times \left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos(\theta) + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin(\theta)\right)$$

et on cherche un angle ϕ tel que :

$$\cos(\phi) = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} \text{ et } \sin(\phi) = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Enfin, en utilisant la formule $\cos(a+b)$, on se rend compte que $\cos(\theta-\phi)$ et $\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos(\theta) + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin(\theta)$, c'est la même chose !

■ ***Exemple:***

Résoudre l'équation d'inconnue θ *réel :* $2\cos(\theta) + \sqrt{12}\sin(\theta) = 4$

Appliquons ! Soit θ un réel. On a :

$$\begin{aligned} 2\cos(\theta) + \sqrt{12}\sin(\theta) &= 4 \times \left(\frac{1}{2}\cos(\theta) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\theta)\right) \\ &= 4 \times \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos(\theta) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin(\theta)\right) \\ &= 4\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

On en déduit que l'ensemble des solutions est $\left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

MÉTHODE 6 : Trouver la forme trigonométrique de z

■ **Principe :**
Pour trouver la forme trigonométrique d'un complexe s'écrivant $a+ib$ (avec a et b deux réels pas tous les deux nuls), on factorise par son module pour obtenir : $\sqrt{a^2+b^2} \times \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + i\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ et on cherche un réel θ tel que :

$$\cos(\theta) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Voici des valeurs classiques de cos et de sin à connaître :

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(\theta)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(\theta)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

■ **Mise en garde :**
Attention, $|z_1 + z_2|$ n'est *a priori* pas $|z_1| + |z_2|$ (souvenez-vous de l'inégalité triangulaire). Signalons aussi que 0 est le seul complexe à ne pas avoir d'argument. Ainsi si vous utilisez la fonction argument, assurez-vous de ne pas avoir de complexe nul.

■ **Cas d'utilisation :**
Déjà, en utilisant écriture algébrique et écriture trigonométrique, et en identifiant, on résout (encore) $62,3\%$ de vos exos de complexes. Voici ce que donne l'identification : Si a, b, x, y sont quatre **réels**, on a :

$$a + ib = x + iy \Leftrightarrow a = x \text{ et } b = y.$$

Si r et r' sont deux **réels strictement positifs** et θ et θ' deux **réels**, on a :

$$r \exp(i\theta) = r' \exp(i\theta') \Leftrightarrow r = r' \text{ et } \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \theta = \theta' + 2k\pi.$$

Autre utilisation de l'écriture trigonométrique : le calcul de z^n. Par l'écriture algébrique, on utilise la formule du binôme de Newton :

$$(a + ib)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k (ib)^{n-k}.$$

Cela donne $n + 1$ termes, c'est pénible. Si $z = \rho \exp(i\theta)$, avec ρ et θ deux **réels**, alors z^n est tout simplement $\rho^n \exp(in\theta)$.

■ ***Exemple:***

Mettre sous forme trigonométrique $(1 + i) \times (\sin(\theta) + i\cos(\theta))$ *avec* θ *un réel.*

Appelons z ce complexe, on a :

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{2} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \times i(\cos(\theta) - i\sin(\theta)) \\ &= \sqrt{2} \exp\left(i\frac{\pi}{4}\right) \times \exp\left(i\frac{\pi}{2}\right) \times \exp(-i\theta) \\ &= \sqrt{2} \exp\left(i\left(\frac{3\pi}{4} - \theta\right)\right) \end{aligned}$$

MÉTHODE 7 : Maîtriser la technique de l'angle moitié

■ **Principe :**

On souhaite mettre sous forme trigonométrique un complexe de la forme suivante :

$$\exp(ia) + \exp(ib) \text{ ou } \exp(ia) + \exp(ib).$$

Pour cela, il suffit de mettre en facteur l'angle moitié, c'est-à-dire $\exp\left(i\dfrac{a+b}{2}\right)$, puis d'utiliser les formules d'Euler rappelées dans la méthode "Savoir linéariser". On obtient alors ces deux formules (qu'il ne faut pas apprendre par cœur mais savoir retrouver en factorisant comme on vient juste de le dire !) :

- $\exp(ia) + \exp(ib) = 2\cos\left(\dfrac{a-b}{2}\right)\exp\left(i\dfrac{a+b}{2}\right)$.
- $\exp(ia) - \exp(ib) = 2i\sin\left(\dfrac{a-b}{2}\right)\exp\left(i\dfrac{a+b}{2}\right)$.

De temps en temps, on recontre des $\exp(ia)+1$ et $\exp(ia)-1$ (cas particulier de l'angle moitié où l'un des deux angles est nul), cela donne :

$$\exp(ia) + 1 = 2\cos\left(\frac{a}{2}\right)\exp\left(i\frac{a}{2}\right) \quad \text{et} \quad \exp(ia) - 1 = 2i\sin\left(\frac{a}{2}\right)\exp\left(i\frac{a}{2}\right).$$

■ ***Exemple:***

Soit a un élément de $]0,\pi]$. Mettre sous forme trigonométrique le complexe suivant :

$$z = \frac{\exp(ia)+1}{1-\exp(ia)}.$$

On note que $1-\exp(ia)$ n'est pas nul puisque a n'est pas un multiple de 2π. On met $\exp\left(i\frac{a}{2}\right)$ en facteur au numérateur comme au dénominateur, on obtient :

$$\begin{aligned} z &= \frac{\exp\left(i\frac{a}{2}\right)+\exp\left(-i\frac{a}{2}\right)}{\exp\left(-i\frac{a}{2}\right)-\exp\left(i\frac{a}{2}\right)} \times \frac{\exp\left(i\frac{a}{2}\right)}{\exp\left(i\frac{a}{2}\right)} \\ &= \frac{2\cos\left(\frac{a}{2}\right)}{-2i\sin\left(\frac{a}{2}\right)} \\ &= i\frac{\cos\left(\frac{a}{2}\right)}{\sin\left(\frac{a}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Une subtilité, z n'est pas $\dfrac{i}{\tan\left(\frac{a}{2}\right)}$ car z est défini si a vaut π, ce qui n'est pas le cas de $\dfrac{i}{\tan\left(\frac{a}{2}\right)}$. En fait, z est $\dfrac{i}{\tan\left(\frac{a}{2}\right)}$ pour a appartenant à $]0,\pi[$.