# Chapitre 1

# Equations et inéquations

*« Ce n'est pas le savoir qui définit le mathématicien, c'est le savoir-faire. La rigueur nécessaire à toute recherche va de pair avec l'élan poétique : j'ai autant de plaisir à déchiffrer des partitions de Chopin que des livres d'équations. Il y a une similitude étonnante entre cette musique qui rentre par une fenêtre, s'impose et disparaît et la résolution élégante d'une belle équation. »*

Alain Connes (lauréat de la Médaille Fields en 1982)

La modélisation de problèmes par des équations algébriques apparaît très tôt dans l'histoire (environ 2000 ans avant J.-C.). Il a fallu cependant attendre les mathématiciens arabes qui, en partant des textes des Anciens, ont cherché à théoriser les règles de calcul. En tant que discipline, la théorie des équations est véritablement née au IX$^e$ siècle suite à un ouvrage du savant persan Al-Khwarizimi dont le premier mot du titre est "al-jabr" qui donna algèbre. Les Européens ont mis plusieurs siècles pour pratiquer et maîtriser cette nouvelle discipline. Soulignons ici l'apport considérable de François Viète (1540-1603), qui a eu l'idée de remplacer les inconnues des équations par des symboles et que l'on peut considérer comme le précurseur du calcul littéral utilisé aujourd'hui. Au XIX$^e$ siècle, la question des équations résolubles par radicaux a amené Lagrange, Ruffini, Abel et surtout Galois à l'algèbre moderne et à la théorie des groupes.

Ce chapitre est consacré à des exercices de base sur les équations et les inéquations, à faire dès la rentrée universitaire et peut-être même juste avant comme devoirs de vacances. Il s'agira essentiellement d'équations du second degré et d'équations trigonométriques. Le chapitre se termine sur le problème classique de la construction du pentagone et sur la résolution des équations du troisième degré par la méthode de Cardan. Il faudra attendre le chapitre sur les polynômes, puis sur les fonctions pour aborder d'autres types d'équations et celui sur les systèmes linéaires pour apprendre à résoudre des systèmes d'équations linéaires à plusieurs inconnues.

## 1.1 Rappels de cours

**Equations du second degré dans $\mathbb{R}$**
Pour résoudre une équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ dans $\mathbb{R}$, on calcule $\Delta = b^2 - 4ac$.

* Si $\Delta < 0$, le trinôme n'a pas de solution réelle et est toujours du signe de $a$.
* Si $\Delta = 0$, le trinôme a une solution (double) réelle $x_1 = -\dfrac{b}{2a}$ et l'on a la factorisation
$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2.$$
Dans ce cas, $ax^2 + bx + c$ est toujours du signe de $a$ pour $x \neq x_1$ et est nul pour $x = x_1$.
* Si $\Delta > 0$, le trinôme a deux solutions réelles qui sont $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et l'on a la factorisation
$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$
Dans ce cas, $ax^2 + bx + c$ est du signe de $-a$ à l'"intérieur" des solutions, du signe de $a$ à l'"extérieur" des solutions et est nul pour $x = x_1$ ou $x = x_2$.

**Proposition.**

*i) Si $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ admet deux solutions réelles $x_1$ et $x_2$, alors*
$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 & = & -\dfrac{b}{a} \\ x_1 x_2 & = & \dfrac{c}{a} \end{array}\right. .$$

*ii) Réciproquement, si $S$ et $P$ sont des réels fixés, les solutions réelles du système*
$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 & = & S \\ x_1 x_2 & = & P \end{array}\right.$$
*d'inconnues $x_1$ et $x_2$ sont les solutions réelles du trinôme*
$$x^2 - Sx + P = 0.$$

**Remarque.** Dans le chapitre sur les nombres complexes, on apprendra à résoudre dans $\mathbb{C}$ des équations du second degré à coefficients complexes. Notons que la proposition précédente est aussi valable dans $\mathbb{C}$.

**Equations bicarrées**
Pour résoudre une équation de la forme $ax^4 + bx^2 + c = 0$ ($a \neq 0$), il suffit de poser $X = x^2$. L'équation devient une équation du second degré, en l'occurrence

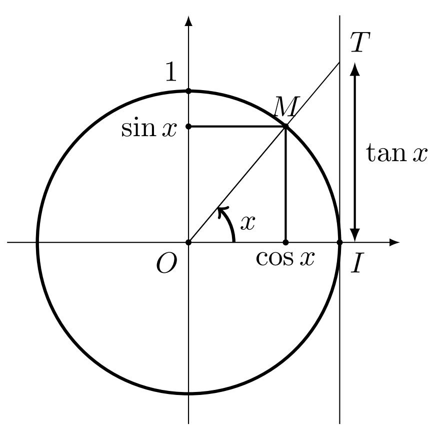
$$aX^2 + bX + c = 0,$$

que l'on résout pour obtenir les solutions en $X$. On revient à l'inconnue $x$ à l'aide de $X = x^2$.

**Rappels de trigonométrie**
Avant de parler des équations trigonométriques, on propose de rappeler les notions sous-jacentes à tout problème de trigonométrie.

**Définition.** *Le plan étant rapporté à un repère orthonormé d'origine $O$, on appelle cercle trigonométrique le cercle de centre $O$ et de rayon 1, orienté dans le sens direct (c'est-à-dire dans le sens inverse des aiguilles d'une montre). Soit $M$ un point du cercle et $I$ le point de coordonnées $(1;0)$. On note $x$ une mesure en radians de l'angle $(\vec{OI}, \vec{OM})$. Le cosinus, noté $\cos x$, de $x$ est l'abscisse de $M$. Le sinus, noté $\sin x$, de $x$ est l'ordonnée de $M$. La tangente, notée $\tan x$, de $x$ est définie par $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ lorsque $x$ n'est pas de la forme $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k$ dans $\mathbb{Z}$ (où $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers relatifs).*

Le schéma suivant permet d'illustrer notre propos.




La proposition suivante découle directement de la définition.

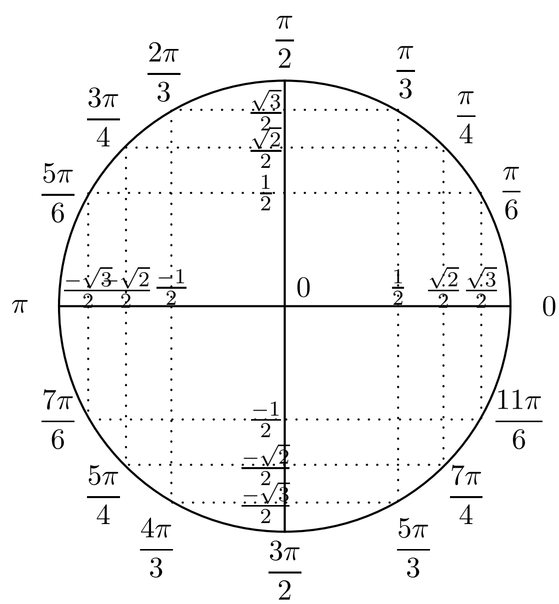
**Proposition.** *Soit $x$ un réel. On a les relations suivantes :*

* $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
* $\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ *(lorsque c'est défini)*
* $\sin(2\pi + x) = \sin x$ *et* $\cos(2\pi + x) = \cos x$ *(la fonction sinus et la fonction cosinus sont $2\pi$-périodiques)*
* $\tan(\pi + x) = \tan x$ *lorsque c'est défini (la fonction tangente est $\pi$-périodique)*
* $\sin(-x) = -\sin x$ *et* $\tan(-x) = -\tan x$ *lorsque c'est défini (la fonction sinus et la fonction tangente sont impaires)*
* $\cos(-x) = \cos x$ *(la fonction cosinus est paire)*
* $\sin(\pi - x) = \sin x$ *et* $\cos(\pi - x) = -\cos x$
* $\sin(\pi + x) = -\sin x$ *et* $\cos(\pi + x) = -\cos x$
* $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$ *et* $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$
* $\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x$ *et* $\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin x$.

Voici ci-dessous le tableau des angles remarquables à connaître absolument.

| $\theta$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sin\theta$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ | $0$ |
| $\cos\theta$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $-1$ |
| $\tan\theta$ | $0$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ | n'existe pas | $0$ |

La figure suivante permet de visualiser les cosinus et sinus des angles remarquables, ainsi que des angles qui leur sont associés.



Voici maintenant les formules de trigonométrie circulaire à connaître ou à savoir retrouver.

* $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$ et $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$
* $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ et $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
* $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$ et $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$.

De ces formules, on déduit :

* $\sin a \sin b = \dfrac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$
* $\cos a \cos b = \dfrac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$
* $\sin a \cos b = \dfrac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$.

En posant $p = a+b$ et $q = a-b$, on parvient à

* $\cos p - \cos q = -2\sin(\dfrac{p+q}{2})\sin(\dfrac{p-q}{2})$
* $\cos p + \cos q = 2\cos(\dfrac{p+q}{2})\cos(\dfrac{p-q}{2})$
* $\sin p + \sin q = 2\sin(\dfrac{p+q}{2})\cos(\dfrac{p-q}{2})$
* $\sin p - \sin q = 2\cos(\dfrac{p+q}{2})\sin(\dfrac{p-q}{2})$.

Viennent ensuite les formules de duplication :

* $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$
* $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$
* $\sin^2(x) = \dfrac{1 - \cos(2x)}{2}$
* $\cos^2(x) = \dfrac{1 + \cos(2x)}{2}$
* $\tan(2x) = \dfrac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$.

En électricité, on a souvent besoin des tensions et des intensités sinusoïdales. On est alors amené à utiliser les transformations suivantes, qui permettent d'écrire une combinaison linéaire de sinus et cosinus avec un seul sinus ou un seul cosinus mais avec un déphasage. On a

$$\begin{aligned} a\cos x + b\sin x &= \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right) \\ &= \sqrt{a^2+b^2}(\cos\alpha\cos x + \sin\alpha\sin x) \\ &= \sqrt{a^2+b^2}\cos(\alpha - x) \\ &= \sqrt{a^2+b^2}\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha + x) \end{aligned}$$

où $\alpha$ vérifie

$$\left\{\begin{array}{rcl}\cos\alpha & = & \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\\ \sin\alpha & = & \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\end{array}\right. .$$

**Equations trigonométriques**

**Proposition.** *Soit $a$ un réel.*

* *Les solutions de l'équation*

$$\cos x = \cos a$$

*sont les réels $x$ de la forme $x = a + 2k\pi$ ou $x = -a + 2k\pi$ avec $k$ dans $\mathbb{Z}$.*

* *Les solutions de l'équation*

$$\sin x = \sin a$$

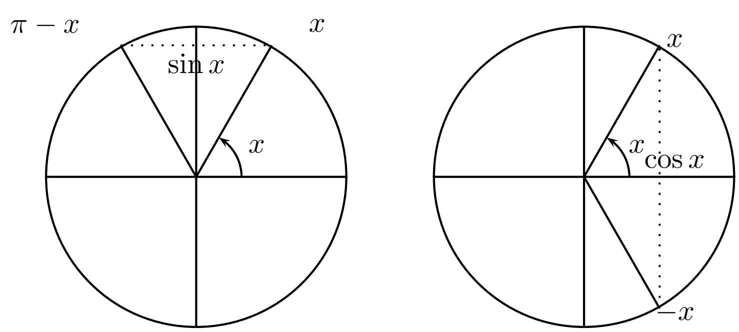
*sont les réels $x$ de la forme $x = a + 2k\pi$ ou $x = \pi - a + 2k\pi$ avec $k$ dans $\mathbb{Z}$.*

* *On suppose que $\tan a$ existe. Les solutions de l'équation*

$$\tan x = \tan a$$

*sont les réels $x$ de la forme $x = a + k\pi$ avec $k$ dans $\mathbb{Z}$.*

Pour bien comprendre cette proposition, il suffit là encore d'avoir recours au cercle trigonométrique (voir ci-après).




## 1.2 Gymnastique de rentrée

**Exercice 1.** $\diamond$

*Résoudre les équations et inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$*

*1)* $-2x^2 + 7x - 5 = 0$

*2)* $-3x^2 + 7x - 2 \geq 0$

*3)* $(x^2 + 2x + 1)^2 < 16$

*4)* $x^4 + 10x^2 + 25 = 0$.

**Exercice 2.** $\diamond\diamond$
*Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *les inéquations suivantes*

*1)* $\dfrac{x^2 + 10x + 25}{-2x^2 - 7x - 3} < 0$

*2)* $\dfrac{2x^2 - 8x + 6}{-2x^2 - 7x - 3} \geq 0$.

**Exercice 3.** $\diamond\diamond$
*Résoudre dans* $\mathbb{R}$

*1)* $|x - 2| = |4x - 1|$

*2)* $\sqrt{x^2 - 2} = \sqrt{3x - 4}$

*3)* $2x + \sqrt{x^2 + 5x + 4} < 2$.

## 1.3 Trigonométrie

**Exercice 4.** $\diamond\diamond$
*Résoudre les équations trigonométriques suivantes*

*1)* $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

*2)* $\sin x = \cos x$

*3)* $\sqrt{3}\cos(2x) + \sin(2x) = 1$

*4)* $\cos(4x) + \sin(2x) = 0$.

**Exercice 5.** $\diamond\diamond$

*1)* $\sin(3x + \dfrac{\pi}{3}) = \sin(\dfrac{2\pi}{3} - x)$

*2)* $\sin(3x) = \cos(x - \dfrac{\pi}{6})$

*3)* $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos(4x - \dfrac{\pi}{4})$.

**Exercice 6.** $\diamond\diamond$
*Résoudre les inéquations suivantes sur* $[-\pi; \pi]$

*1)* $\cos x > \dfrac{1}{2}$

*2)* $\sin x \leq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

## 1.4 Pour approfondir

**Exercice 7.** ◇◇
*Donner la valeur exacte de* $\cos\frac{\pi}{8}$ *et de* $\sin\frac{\pi}{8}$.

**Exercice 8.** ◇
*Montrer que pour tout* $a$ *et tout* $b$ *réels non nuls, on a*

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}+3 \geq 2(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}).$$

**Exercice 9.** ◇
*Soient* $A$, $B$ *et* $C$ *trois points alignés tels que* $AB = 1$ *et* $AC = 1 + x$ *avec* $x > 0$. *On suppose que*

$$\frac{1}{x}=\frac{x}{1+x}.$$

*1) Trouver la valeur exacte de* $x$.

*2) Déterminer* $x - 1$ *et* $\frac{1}{x}$.

## 1.5 Applications

**Exercice 10.** ◇◇
*On considère deux résistances* $R_1$ *et* $R_2$. *Déterminer* $R_1$ *et* $R_2$ *pour que le montage en série des deux résistances ait une résistance de* $8$ *k*$\Omega$ *tandis que le montage en dérivation des deux résistances a une résistance de* $1,5$ *k*$\Omega$.

**Exercice 11.** ◇◇
*Pour se rendre de leur maison à la ville de Metz, un couple de cyclistes partent en même temps. On suppose que leur trajet fait 97,5 km et que l'un des deux, dont la vitesse moyenne sur ce parcours est supérieure de 2 km|h à celle de l'autre, arrive 1 heure plus tôt. Quelles sont les vitesses respectives des deux cyclistes ?*

**Exercice 12.** ◇◇
*A l'interface entre deux milieux matériels, un rayon lumineux change de direction selon la loi de réfraction de Descartes :*

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$$

*où* $n_1$ *(resp.* $n_2$*) désigne l'indice du premier (resp. second) milieu et* $i_1$ *(resp.* $i_2$*) désigne l'angle d'incidence correspondant. On suppose que les angles d'incidence sont dans* $[0;\frac{\pi}{2}]$. *Donner une condition sur* $n_1$ *et* $n_2$ *pour que l'équation*

$$i_2 = 2i_1$$