1 Suites

GÉNÉRALITÉS

Définitions

Une **suite** est une liste ordonnée de nombres :

$$u_1 \text{ (« } u \text{ indice 1 »)}, u_2, u_3, u_4, \ldots$$

On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite: $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, u_{n+1}, \ldots$

On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite: $u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, u_{n+1}, \ldots$

S'il n'y a pas d'ambiguïté, on peut noter : (u_n) ou u.

Le nombre u_n est le terme d'indice n de la suite u.

✖ **Attention !** Pour $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, u_n est le n-ième terme ; pour $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, u_n est le $(n+1)$-ième terme.

On peut aussi définir $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme une fonction u de $\mathbb{N}$ (ensemble des entiers naturels) dans $\mathbb{R}$:

à 0 on associe u_0, à 1 on associe u_1, …, à n on associe u_n, …

$$u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$n \mapsto u_n$$

D'ailleurs on trouve parfois la notation $u(n)$ pour u_n, de la même façon qu'on note $f(x)$ l'image d'un réel x par une fonction f.

Deux manières d'expliciter une suite

• On peut exprimer u_n en fonction de n.

Par exemple, soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par, pour tout entier naturel n : $u_n = n^2$. On a : $u_0 = 0$; $u_1 = 1$; $u_2 = 4$; $u_3 = 9$...

On peut aussi calculer, par exemple : $u_{n+1} = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$ qu'il ne faut pas confondre avec $u_n + 1 = n^2 + 1$.

• On peut aussi définir une suite par **récurrence**, en donnant son premier terme et une relation entre différents termes de la suite.

Par exemple, soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 2u_n - 1$ (*).

Pour calculer u_1, on fait $n = 0$ dans (*) : $u_1 = 2u_0 - 1 = 2 \times 3 - 1 = 5$.

Pour calculer u_2, on fait $n = 1$ dans (*) : $u_2 = 2u_1 - 1 = 2 \times 5 - 1 = 9$.

De même : $u_3 = 2u_2 - 1 = 17$. On remarque que, pour calculer un terme de la suite, on doit calculer tous les termes d'indice inférieur.

Sens de variation d'une suite

Définition : une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite :

– **croissante** si, pour tout entier naturel n : $u_n \leq u_{n+1}$ (« chaque terme est plus petit que le suivant ») ;

– **décroissante** lorsque, pour tout entier naturel n : $u_n \geq u_{n+1}$;

– **monotone** lorsqu'elle est croissante ou décroissante.

Méthode pour prouver qu'une suite est monotone : on étudie le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$.

Reprenons l'exemple de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par, pour tout entier naturel n : $u_n = n^2$; on calcule, pour tout entier naturel n :

$u_{n+1} - u_n = (n + 1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$. Or $2n + 1 > 0$ car n est un entier naturel. Donc $u_{n+1} - u_n > 0$. Donc la suite u est strictement croissante.

✖ **Attention !** On n'aurait pas pu se contenter des premiers termes de cette suite calculées ci-dessus pour pouvoir affirmer la croissance de la suite, car on ne savait rien des termes suivants.

Méthode pour prouver qu'une suite n'est pas monotone : il suffit de calculer 3 termes consécutifs de cette suite qui fournissent un contre-exemple. Par exemple, soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par, pour tout entier naturel n : $u_n = (-1)^n$. On a : $u_0 = 1$; $u_1 = -1$; $u_2 = 1$.

Donc $u_0 > u_1$ mais $u_1 < u_2$. Cette suite n'est donc pas monotone.

SUITES ARITHMÉTIQUES

Définitions

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **arithmétique de raison *r*** (avec r réel fixé) si, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = u_n + r$ (« on passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours le même nombre »).

Méthode pour montrer qu'une suite est arithmétique : il suffit de montrer que pour tout entier naturel n, la différence $u_{n+1} - u_n$ est égale à un réel constant qui sera la raison de la suite.

Méthode pour montrer qu'une suite n'est pas arithmétique : on utilise trois termes consécutifs qui fournissent un contre-exemple. Si on reprend la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par, pour tout entier naturel n : $u_n = n^2$: $u_1 - u_0 = 1$ alors que : $u_2 - u_1 = 3$. u n'est donc pas arithmétique (si elle l'avait été, ces deux différences auraient été égales).

✖ **Attention !** Trois termes ne suffiraient pas pour prouver qu'une suite EST arithmétique.

Sens de variation d'une suite arithmétique

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison r, alors :
– si $r > 0$, la suite est strictement croissante ;
– si $r < 0$, elle est strictement décroissante ;
– si $r = 0$, elle est constante.
Cela découle immédiatement de : $u_{n+1} - u_n = r$.

Expression explicite du terme général u_n en fonction de n

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison r, alors pour tout entier naturel n : $u_n = u_0 + nr$.

✖ **Attention !** Si le premier terme de la suite est u_1, on aura:

$$u_n = u_1 + (n - 1)r.$$

Relation entre deux termes u_m et u_p

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison r, alors pour tous entiers naturels m et p : $u_m = u_p + (m - p)r$.

SUITES GÉOMÉTRIQUES

Définition

On dit qu'une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **géométrique de raison *q*** (avec q réel fixé non nul) si, pour tout entier naturel n : $v_{n+1} = q \times v_n$ (« on passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par le même nombre »).

Remarque : une suite géométrique de raison $q = 1$ est constante.

Méthode pour montrer qu'une suite est géométrique : il suffit de montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, le quotient $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ est égal à un réel constant qui sera la raison de la suite. Toutefois, attention, cette méthode suppose de savoir que, pour tout n de $\mathbb{N}$, v_n est non nul. Si ce point n'est pas évident, il faudra essayer d'écrire v_{n+1} sous la forme $v_{n+1} = q \times v_n$ en essayant de faire « apparaître » v_n.

Méthode pour montrer qu'une suite n'est pas géométrique : on utilise trois termes consécutifs qui fournissent un contre-exemple. Si on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par, pour tout entier naturel n non nul, $u_n = n^2$: $\dfrac{u_2}{u_1} = 4$ alors que : $\dfrac{u_3}{u_2} = \dfrac{9}{4}$. u n'est donc pas géométrique (si elle l'avait été, ces deux quotients auraient été égaux).

✖ **Attention !** Trois termes ne suffiraient pas pour prouver qu'une suite EST géométrique.

Expression explicite du terme général v_n en fonction de n

Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q, alors pour tout entier naturel n : $v_n = q^n \times v_0$.

✖ **Attention !** si le premier de la suite est v_1, on aura: $v_n = q^{n-1} \times v_1$.

Relation entre deux termes v_m et v_p

Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q, alors pour tous entiers naturels m et p : $v_m = q^{m-p} \times v_p$.

Sens de variation d'une suite géométrique

Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q, alors :
– si $q > 1$ et $v_0 > 0$, la suite est strictement croissante ;
– si q > 1 et $v_0 < 0$, la suite est strictement décroissante ;
– si $0 < q < 1$ et $v_0 > 0$, la suite est strictement décroissante ;
– si $0 < q < 1$ et $v_0 < 0$, la suite est strictement croissante ;
– si $q = 1$, elle est constante ;
– si $q < 0$, elle n'est pas monotone.

Somme de termes consécutifs

Dans ce paragraphe, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q différente de 1 et n un entier naturel.

• $1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$ (il s'agit de la somme des $n + 1$ premiers termes de la suite géométrique de raison q et de premier terme $q^0 = 1$).

• On en déduit : $v_0 + v_1 + \ldots + v_n = v_0 \times \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

En effet : $v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_n$
$= v_0 + q \times v_0 + q^2 \times v_1 + \ldots + q^n \times v_0$
$= v_0 (1 + q + q^2 + \ldots + q^n)$.

On a aussi de façon analogue, si n est non nul :

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n = v_1 \times \frac{1-q^n}{1-q}.$$

• *Complément au programme :* on a un résultat plus général qu'il peut être utile de retenir. La somme T de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q différente de 1 se calcule ainsi :

$$T = \text{premier terme ajouté} \times \frac{1-q^{\text{nombre de termes ajoutés}}}{1-q}$$

On retrouve alors les cas particuliers précédents, concernant les sommes $1 + q + q^2 + \ldots + q^n$ et $v_0 + v_1 + \ldots + v_n$ (il y a bien $n + 1$ termes ajoutés à chaque fois), et $v_1 + v_2 + \ldots + v_n$ (il y a bien n termes ajoutés).

• *Remarque :* dans le cas peu intéressant où la suite est constante ($q = 1$), on a : $v_0 + v_1 + \ldots + v_n = (n+1)v_0$.

Comportement de q^n lorsque n tend vers l'infini

• Si $q > 1$, alors q^n peut être rendu aussi grand que l'on veut pourvu que n soit choisi suffisamment grand. On dit que q^n tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$ ou encore que la limite de q^n est $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$. On note alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.

• Si $q = 1$, alors $q^n = 1$ pour tout entier naturel n.

• Si $-1 < q < 1$, alors q^n peut être rendu aussi proche de 0 que l'on veut pourvu que n soit choisi suffisamment grand. On dit que q^n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ ou encore que la limite de q^n est 0 lorsque n tend vers $+\infty$. On note alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$. Dans ce cas, $v_1 \times \dfrac{1-q^n}{1-q}$ tend vers $\dfrac{v_1}{1-q}$ lorsque n tend vers $+\infty$; cela signifie que : $v_1 + v_2 + \ldots + v_n$, somme dont le nombre de termes tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$, tend vers une limite finie.

• Si $q \leq -1$, alors q^n n'a pas de limite lorsque n tend vers $+\infty$.

• *Remarques :*

– une suite croissante ne tend pas nécessairement vers $+\infty$;

– la notion de limite s'étend à une suite quelconque : ainsi on dira qu'une suite (U_n) tend vers $+\infty$ (lorsque n tend vers $+\infty$) si U_n peut être rendu aussi grand que l'on veut pourvu que n soit choisi suffisamment grand, et on dira qu'une suite (U_n) tend vers un réel L (lorsque n tend vers $+\infty$) si U_n peut être rendu aussi proche de L que l'on veut pourvu que n soit choisi suffisamment grand.

SUITES ARITHMÉTICO-GÉOMÉTRIQUES

Définition

Soient a et b des réels fixés. On dit qu'une suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **arithmético-géométrique** si, pour tout entier naturel n : $w_{n+1} = aw_n + b$.

Remarques : il s'agit d'un cas particulier de suite définie par récurrence ; si $b = 0$, il s'agit d'une suite géométrique ; si $a = 1$, il s'agit d'une suite arithmétique ; l'étude d'une suite aithmético-géométrique amène à faire intervenir une suite auxiliaire géométrique mais l'énoncé doit donner toutes les indications sur la démarche (cf. exercices 10 à 14 notamment).

✷ Exercice 1 — 25 min

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par, pour tout entier naturel n :

$$u_n = \frac{2n+1}{2n+3}.$$

1. Calculer les trois premiers termes de cette suite.

2. Cette suite est-elle arithmétique ? géométrique ?

3. Étudier le sens de variation de cette suite.

4. Calculer u_{10} ; u_{100} ; $u_{1\,000}$. Que peut-on conjecturer pour cette suite ?

✷✷ Exercice 2 — 1 h

Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que : $u_4 = \dfrac{16}{3}$ et $u_6 = 12$.

1. On suppose dans cette question seulement que la suite est arithmétique.

a) Calculer sa raison et u_0, u_3, u_7.

b) Pour tout entier naturel n, exprimer u_n en fonction de n.

c) Étudier le sens de variation de la suite.

2. On suppose maintenant que la suite est géométrique, de raison positive. Répondre alors aux mêmes questions qu'au **1**. Traiter aussi les questions suivantes :

d) Étudier la limite éventuelle de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

e) Calculer la somme $u_0 + u_1 + ... + u_5$; donner le résultat sous forme d'une fraction irréductible.

f) Pour tout entier naturel n, on pose : $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$.

i) Quel est le sens de variation de la suite (S_n) ?

ii) Exprimer S_n en fonction de n.

iii) Étudier la limite éventuelle de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

3. On suppose toujours que la suite est géométrique, de raison positive, mais on prend : $u_4 = 12$ et $u_6 = \dfrac{16}{3}$. Répondre alors aux mêmes questions qu'au **2**.

✷✷ Exercice 3 — 30 min

On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par, pour tout entier naturel n : $u_n = \dfrac{1}{2}n - 5$ et $v_n = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{4}{3}\right)^{n-1}$.

1.

a) Montrer que la suite (u_n) est arithmétique. Préciser sa raison et son premier terme.

b) Montrer que la suite (v_n) est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.
2. Déterminer le sens de variation de chacune des deux suites.
3. Calculer la somme des six premiers termes de la suite (v_n).

✷ Exercice 4 — 15 min

Le jeu d'échecs, qui se joue sur un plateau carré de 8 × 8 cases, a été créé en Inde. Le roi auquel il fut proposé en fut si enthousiasmé que, dit la légende, il proposa à l'inventeur du jeu de réaliser n'importe lequel de ses vœux ; l'inventeur émit une demande a priori modeste : il demanda au roi de déposer un grain de blé sur la première case du plateau, puis deux sur la deuxième case, quatre sur la troisième, huit sur la quatrième,... ainsi de suite, en doublant le nombre de grains de blé d'une case à la suivante.

Combien y aura-t-il de grains sur la dernière case ? Sur l'ensemble de l'échiquier ? Comparer à la production annuelle des États-Unis (environ 44 millions de tonnes ; un grain pèse environ 10^{-2} g).

✷ Exercice 5 — 45 min

On s'intéresse à l'évolution de la population mondiale entre les années 1950 et 1990. Pour cela, on donne le tableau suivant :

n	0	1	2	3	4	5
Année a_n	1950	1960	1970	1980	1990	2000
Population p_n (en milliards d'habitants)	2,5	3,0	3,6	4,4	5,2	6

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite arithmétique définie par $u_0 = 2{,}5$ et $u_5 = 6$.
a) Calculer sa raison r et u_1, u_2, u_3, u_4, u_5.
b) On veut représenter l'évolution de la population mondiale par cette suite arithmétique. L'indice n représente la dizaine d'années comme cela est indiqué sur le tableau ci-dessus et u_n est exprimé en milliards d'habitants. Représenter graphiquement (sur papier millimétré ou à l'aide d'un tableur) u_n en fonction de n. Donner une équation de la droite où sont alignés les cinq points obtenus.
c) En expliquant à chaque fois la démarche, trouver la valeur de u_n en l'an 2010 de deux manières différentes : graphiquement, puis par le calcul.
2. Exprimer en pourcentage l'augmentation de la population entre : 1950 et 1960 ; 1960 et 1970 ; 1970 et 1980 ; 1980 et 1990 ; 1990 et 2000.
3. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite géométrique de premier terme $v_0 = 2{,}5$ et de raison $q = 1{,}2$.
a) Calculer v_1, v_2, v_3, v_4 et v_5.

b) On veut représenter l'évolution de la population mondiale par cette suite géométrique. Sur le même graphique qu'en **1.** b), représenter v_n en fonction de n.

c) Trouver par le calcul la valeur de v_n en l'an 2010.

4. Représenter sur le graphique précédent p_n en fonction de n. Laquelle des deux suites u ou v paraît-elle approcher au mieux la suite p ?

✷✷ Exercice 6 — 30 min

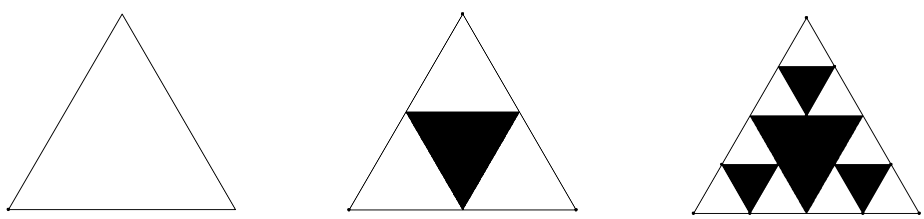
Le philosophe grec Zénon d'Elée (V^e siècle avant J.-C.) « démontrait » l'impossibilité du mouvement à l'aide d'exemples tels que celui-ci : une flèche ne peut pas atteindre sa cible car, avant de l'atteindre, il lui faudra parcourir la moitié de sa distance initiale à la cible, puis la moitié du chemin restant, et ainsi de suite, une infinité de moitiés successives. Prenons 1 pour la distance initiale entre la flèche et sa cible. Pendant la première étape du trajet, la flèche doit parcourir une distance de $\frac{1}{2}$; pendant les deux premières étapes, elle doit parcourir une distance de : $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$; ... Pendant les n premières étapes du trajet, elle doit parcourir une distance égale à : $S_n = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^n}$.

Montrer que : $S_n = 1-\frac{1}{2^n}$; quelle est la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$? Écrire un algorithme qui détermine le plus petit entier naturel n tel que : $1 - S_n < a$, a réel positif choisi par l'utilisateur.

✷ Exercice 7 — 30 min

Triangle de Sierpinski

On divise un triangle équilatéral en quatre triangles équilatéraux obtenus en traçant les segments joignant les milieux des côtés et on noircit le triangle central. Chaque triangle non noirci est alors divisé en quatre triangles équilatéraux selon le même procédé et on noircit le triangle central comme précédemment.



Première étape **Deuxième étape**