Chapitre 1

Logique

Nous commençons cet ouvrage par un chapitre sur la logique, laquelle définit la manière de raisonner en mathématiques. En effet, le discours régissant les objets mathématiques, c'est-à-dire les quantités et les ordres[1], doit respecter une certaine norme pour être compris de tous sans ambiguïté. Ceci justifie la position de ce chapitre en tête de livre. Ne cédez donc pas à la tentation de parcourir les autres chapitres avant d'avoir lu celui-ci en entier : sauter le présent chapitre ne vous éclairera pas plus vite sur ce que sont les mathématiques en prépa mais, au contraire, cela vous fera découvrir des concepts énoncés dans une langue que vous connaissez encore mal !

Pour saisir l'importance de la logique, il faut aussi que vous compreniez qu'un mathématicien, plus que tout autre scientifique, n'admet aucune assertion pour juste s'il n'est pas capable de prouver lui-même et de manière indiscutable qu'elle l'est. Or, le seul moyen de rendre un raisonnement indiscutable est de l'écrire dans une langue universellement compréhensible, avec des codes universellement admis, bref de respecter la logique. Bon, il ne faut pas que cet avertissement vous effraie plus que de raison : nous allons vous aider à apprendre progressivement la rigueur et même à l'aimer, puisque c'est le seul moyen de ne pas écrire des choses fausses. Présentée ainsi, la logique est plutôt attrayante, non ? Alors, commençons ce cours sans tarder !

Ah ! Encore un détail... Notez que, dans ce chapitre, vous trouverez certains exemples dont le titre est suivi d'une étoile ($\star$). Cela signifie que l'énoncé

1. C'est ainsi que *le Petit Robert* définit les mathématiques. On le comprend bien si l'on s'en tient à l'exemple des symboles d'égalité et d'inégalité, qui établissent un lien entre des objets, les quantifiant et les ordonnant, quels que soient ces objets : nombres, ensembles, suites et autres objets construits par une abstraction plus ou moins poussée.

peut dérouter les lecteurs qui ne connaissent pas encore certaines notions qui seront approfondies dans la suite du livre mais qui sont en principe au programme de terminale (au moins pour l'intuition). Il est en effet délicat de vous expliquer la logique en restreignant le propos à des exemples déconnectés des notions mathématiques que nous souhaitons vous faire découvrir dans cet ouvrage. Si ces exemples plus compliqués vous semblent trop obscurs, passez-les et réessayez de les lire quand vous aurez fini le livre ! Quoi qu'il en soit, des exemples plus simples vous seront aussi proposés pour bien comprendre chacune des notions présentées dans le présent chapitre.

1.1 Connecteurs logiques

En logique binaire, une assertion peut prendre deux valeurs : vrai ou faux. Pour simplifier, si une assertion A est vraie nous noterons $A \equiv V$ et si elle est fausse $A \equiv F$.

Exemple 1.1 *Les assertions considérées peuvent être de toutes sortes. Par exemple, nous pouvons noter A l'assertion ≪ juillet est le mois juste après le mois d'avril ≫. Naturellement, $A \equiv F$: pas besoin d'avoir fait d'études de mathématiques pour le savoir. Notons maintenant B une autre assertion, au contenu plus mathématique :* $1 - 1 = 0$*. Alors $B \equiv V$.*

Les assertions sont les éléments de base de tout raisonnement mathématique. Elles en sont même l'objet, dans le sens où notre objectif est de construire des assertions à partir de la connaissance d'autres assertions. Cela suppose donc que l'on sache manipuler plusieurs assertions afin de les transformer, d'intégrer les différentes informations qu'elles recèlent jusqu'à atteindre une nouvelle assertion qui répond à la question que l'on se pose. Dans l'exemple suivant, nous avons deux assertions en hypothèse et nous cherchons à établir une troisième assertion.

Exemple 1.2 ($\star$) *Vous connaissez l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{N}$, et l'ensemble des réels, $\mathbb{R}$. Supposez que l'on a également la connaissance des deux assertions suivantes :*
– assertion A : ≪ $\mathbb{N}$ n'a pas de borne supérieure finie ≫ ;
– assertion B : ≪ entre deux nombres entiers il existe une infinité de nombres réels ≫.
La question que l'on se pose, et que l'on veut résoudre uniquement avec les deux assertions A et B, est la suivante : l'ensemble des nombres réels non entiers, $\mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$, admet-il une borne supérieure ? La réponse à cette question est négative et découle de l'utilisation conjointe des assertions A et B. Si nous notons P l'assertion[1] *≪ l'ensemble des*

1. On peut indifféremment parler d'assertion ou de proposition, laquelle a ici prêté son initiale dans notre notation P.

nombres réels non entiers admet une borne supérieure finie ≫, notre objectif est ainsi de prouver que $P \equiv F$.

Alors, voyez-vous pourquoi $P \equiv F$ dans cet exemple ? Tentez d'y répondre en manipulant les deux assertions A et B de toutes les manières possibles ! Ensuite, comparez votre travail avec le raisonnement détaillé ci-après.

Exemple 1.3 ($\star$) *Supposons que P soit vraie, c'est-à-dire que l'ensemble, noté $\mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$, des nombres réels non entiers admette une borne supérieure finie. Alors, par l'assertion A*[1]*, il existe deux nombres entiers distincts, n et m, avec $n < m$, qui majorent $\mathbb{R}$. Par l'assertion B, il existe un réel non entier, x, tel que $n < x < m$. Tout nombre réel non entier y est inférieur ou égal à son majorant n, $y \leq n < x$, donc x n'appartient pas à l'ensemble des nombres réels non entiers, ce qui est contradictoire avec la définition de x. Ainsi, l'hypothèse P au début du raisonnement est fausse et nous pouvons maintenant affirmer que l'ensemble des nombres réels non entiers n'admet pas de borne supérieure finie.*

Très bien vous dites-vous, ce raisonnement est compréhensible et n'est rien d'autre qu'un raisonnement classique de mathématiques dans lequel la connaissance de ce qu'est une assertion n'est pas nécessaire. Certes, ce raisonnement est très classique, mais il abrège une série d'assertions, qui sont implicitement utilisées. Dans l'exemple suivant, on détaille toutes les assertions par lesquelles le raisonnement nous a fait passer. Attention, il est préférable d'écrire la preuve abrégée, comme dans l'exemple 1.3, car la décomposition de toutes les assertions est vraiment fastidieuse. Heureusement, c'est le seul exemple de ce livre où vous lirez autant de détails !

Exemple 1.4 ($\star$) *Rappelons que P est l'assertion : ≪ l'ensemble des nombres réels non entiers admet une borne supérieure finie ≫. Nous avons montré dans l'exemple 1.3 que P était fausse. Nous pouvons maintenant détailler un peu plus les étapes du raisonnement en faisant la liste des assertions intermédiaires que nous avons implicitement utilisées :*

- *Assertion C : ≪ si P est vraie, alors $\mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$ admet un majorant entier ≫, à cause de l'assertion A.*
- *Assertion D : ≪ si $\mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$ admet un majorant entier, alors $\mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$ admet deux majorants entiers distincts ≫, à cause de l'assertion A.*
- *Assertion E : ≪ si $\mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$ admet deux majorants entiers distincts, alors il y a une infinité de nombres réels entre ces deux majorants ≫, à cause de l'assertion B.*
- *Assertion F, obtenue en ne gardant qu'une partie de l'information contenue dans l'assertion E : ≪ si $\mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$ admet deux majorants entiers distincts, alors il y a un nombre réel non entier strictement supérieur au plus petit de ces deux majorants ≫.*
- *Assertion G, obtenue en reformulant l'assertion F : ≪ si $\mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$ admet deux majorants entiers distincts, alors il y a un nombre réel non entier majorant $\mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$ sans y appartenir ≫.*

---

1. Nous reprenons les assertions A et B de l'exemple 1.2.

– *Assertion H, obtenue en synthétisant la chaîne causale mise en évidence dans les assertions C, D et G : « si P est vraie, alors il y a un nombre réel non entier majorant $\mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$ sans y appartenir ».*

Vous constatez que l'assertion H est construite de la manière suivante : si P, alors H' [1]*. Or, H' est en contradiction avec P, donc on ne peut pas avoir P vraie, ce qui, par l'assertion H, entraînerait H' vraie. Par conséquent, $P \equiv F$ et cela répond à la question que nous nous posions : l'ensemble des nombres réels non entiers n'admet pas de borne supérieure finie.*

Nous vous avions prévenu : le raisonnement de l'exemple précédent est très détaillé. Le but est de vous faire comprendre qu'il ne faut jamais s'éloigner des assertions dont on dispose et qu'il faut savoir les utiliser à bon escient et ne pas faire confiance qu'à une compréhension intuitive, dans laquelle l'idée générale des assertions prévaudrait sur l'utilisation précise de l'information qu'elles contiennent. En pratique, vous ne rédigerez pas autant vos raisonnements, sauf situation délicate, et vous vous contenterez d'écrire ce qui suffirait à convaincre une personne suffisamment intelligente pour comprendre immédiatement mais en faisant en sorte qu'elle n'ait pas à faire d'effort de raisonnement. Donc soyez rassurés : nous préférons aussi le raisonnement abrégé de l'exemple 1.3 !

Vous êtes habitué à faire des raisonnements abrégés, donc une étude de la logique peut vous sembler inutile. Néanmoins, une connaissance approfondie des connecteurs logiques (c'est-à-dire des différentes opérations que l'on peut faire sur des assertions) permet d'une part de ne pas se laisser aller à une erreur de raisonnement et d'autre part d'assimiler des connecteurs plus subtils et plus efficaces que ceux que l'on utilise inconsciemment.

1.1.1 Négation

Le premier connecteur à connaître est la négation. Notez que la définition d'un connecteur passe par les tables de vérité qui, à la valeur d'une assertion (V ou F), associent la valeur de l'assertion obtenue en appliquant le connecteur à l'assertion de base. Si cette phrase est un peu sibylline, lisez la définition suivante, qui devrait vous éclairer sur l'usage des tables de vérité.

Définition 1.1 *Soit A une assertion. La négation de A est notée $non(A)$ ou $\neg A$ et est définie par la table de vérité suivante :*

A	$non(A)$
V	F
F	V

1. Plus précisément, cela signifie : si P est vraie, alors H' est vraie.

qu'il faut comprendre ainsi : si A est vrai, alors $non(A)$ est faux ; si A est faux, alors $non(A)$ est vrai.

Il nous semble inutile d'épiloguer sur le sens profond de la négation d'une assertion dans la mesure où celui-ci correspond à l'intuition : la négation d'une assertion affirme son contraire. Quelques exemples devraient éclairer ceux qui ont lu trop rapidement ce qui précède.

Exemple 1.5 *La négation de l'assertion ≪ je suis plus âgé que toi ≫ est ≪ je suis plus jeune que toi ou bien nous avons le même âge ≫. Mais faites attention : la négation de l'assertion ≪ ce livre est bleu ≫ n'est pas ≪ ce livre est rouge ≫ ou ≪ ce livre est blanc ≫, mais simplement ≪ ce livre n'est pas bleu ≫ ! Dans un registre plus mathématique, pour $x \in \mathbb{R}$, on a $[non(x = 1)] \equiv [x \neq 1]$. Nous pouvons également écrire $[non(x < 1)] \equiv [x \geq 1]$.*

On peut déduire une propriété naturelle de la négation : la négation de la négation d'une assertion est cette assertion.

Proposition 1.1 *Soit A une assertion. Alors, $non(non(A)) \equiv A$, ce qui signifie que*

A	$non(non(A))$
V	V
F	F

Preuve. La preuve d'une telle proposition consiste à définir la table de vérité du connecteur de la double négation. Nous pouvons le faire dans un tableau ou simplement l'écrire avec du texte, comme nous allons le faire, ce qui revient au même :
- Si $A \equiv V$, alors $non(A) \equiv F$ par définition de la négation, puis, toujours par définition de la négation, $non(non(A)) \equiv V$.
- Si $A \equiv F$, alors $non(A) \equiv V$ par définition de la négation, puis, toujours par définition de la négation, $non(non(A)) \equiv F$.

V et F étant les deux seules valeurs possibles de l'assertion A, nous avons démontré que $non(non(A)) \equiv A$. ■

1.1.2 Disjonction et conjonction

Après avoir défini dans le paragraphe précédent un connecteur appliqué à une seule assertion, nous allons maintenant voir des connecteurs appliqués à deux assertions : la disjonction et la conjonction. Là encore, la définition passe par la table de vérité, laquelle n'aura plus seulement deux lignes (V et F pour l'assertion de départ), mais quatre lignes, ce qui correspond à tous les couples possibles pour les deux assertions de départ : (V, V), (V, F), (F, V) et (F, F).

Définition 1.2 *A et B sont deux assertions. La* ***disjonction*** *de A et B est notée $[A \text{ ou } B]$ et est définie par :*

A	B	A *ou* B
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

La disjonction est aussi communément appelée le *ou* logique. Concrètement, A *ou* B est vrai dès lors que l'une au moins des deux assertions est vraie. Définissons maintenant la notion cousine de la disjonction qu'est la conjonction :

Définition 1.3 *A et B sont deux assertions. La* ***conjonction*** *de A et B est notée $[A \text{ et } B]$ et est définie par :*

A	B	A *et* B
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

La conjonction est le *et* logique. A *et* B est vrai si à la fois A et B sont vrais. On pourrait aussi dire que A *et* B est faux dès lors que l'une au moins des deux assertions est fausse. Cela permet d'approcher la phrase que nous avons formulée pour expliquer la disjonction et, par conséquent, d'établir un lien entre conjonction et disjonction, lien qui est clair si l'on compare les deux tables de vérités.

Proposition 1.2 *Soient A et B deux assertions. Alors,*

$$\begin{cases} non(A \text{ ou } B) & \equiv & non(A) \text{ et } non(B) \\ non(A \text{ et } B) & \equiv & non(A) \text{ ou } non(B). \end{cases}$$

Preuve. Nous démontrons la première ligne et nous vous laissons ensuite démontrer vous-même la deuxième pour vous entraîner, sachant que la démarche est la même. Comme on l'a déjà écrit, ce genre de démonstration revient à construire la table de vérité de l'assertion étudiée. Cela peut être fait dans un tableau ou en écrivant un texte détaillant chaque ligne du tableau.

Nous pouvons encore aller un peu plus vite en ne détaillant que le cas vrai (le cas faux suivant implicitement comme nous allons l'expliquer dans quelques lignes) en écrivant que $non(A\ ou\ B)$ est vrai si et seulement si $(A\ ou\ B)$ est faux, puis en poursuivant le raisonnement comme nous allons le faire dans quelques lignes. Précisons d'abord que cette phrase signifie que $non(A\ ou\ B)$ est vrai si $(A\ ou\ B)$ est faux et que $non(A\ ou\ B)$ est faux si $(A\ ou\ B)$ est vrai. Ainsi, en écrivant ≪ si et seulement si ≫, on écrit une phrase qui correspond à deux cas de la table de vérité, jouant sur le fait que la logique que nous étudions est une logique binaire et que ce qui n'est pas vrai est donc nécessairement faux. Reprenons donc le raisonnement : $non(A\ ou\ B)$ vrai

– si et seulement si $(A\ ou\ B)$ faux ;
– si et seulement si A faux et B faux (si l'on se reporte à la définition de la disjonction) ;
– si et seulement si $non(A)$ vrai et $non(B)$ vrai ;
– si et seulement si $[non(A)\ et\ non(B)]$ vrai.

■

Exemple 1.6 *La négation de l'assertion ≪ ce livre est bleu et je l'ai lu ≫ est ≪ ce livre n'est pas bleu ou je ne l'ai pas lu ≫. La négation de l'assertion ≪ 10 est un nombre impair ou positif ≫ est ≪ 10 est un nombre pair et négatif ≫, ce qui est notoirement faux. En revanche, la négation de l'assertion ≪ 10 est un nombre impair <u>et</u> positif ≫ est ≪ 10 est un nombre pair <u>ou</u> négatif ≫, ce qui, en l'occurrence, est vrai, car 10 est pair.*

Nous n'avons pas encore mentionné d'autres propriétés qui vont de soi si l'on s'en tient à la définition par les tables de vérité, raison pour laquelle nous n'avons pas rédigé de preuve pour la proposition suivante.

Proposition 1.3 *Soient A, B et C trois assertions. La disjonction et la conjonction sont commutatives, ce qui signifie que*

$$\begin{cases} A\ ou\ B \equiv B\ ou\ A \\ A\ et\ B \equiv B\ et\ A. \end{cases}$$

La disjonction et la conjonction sont associatives, ce qui signifie que

$$\begin{cases} (A\ ou\ B)\ ou\ C \equiv A\ ou\ (B\ ou\ C) \\ (A\ et\ B)\ et\ C \equiv A\ et\ (B\ et\ C). \end{cases}$$

Nous finissons cette partie sur la disjonction et la conjonction par une dernière propriété bien utile qui permet d'écrire, à partir de trois assertions et des deux connecteurs *ou* et *et*, une seule grosse assertion, en manipulant correctement les parenthèses, qui sont les marqueurs de la priorité des opérations.

Proposition 1.4 *Soient A, B et C trois assertions. La disjonction et la conjonction sont distributives, ce qui signifie que*

$$\begin{cases} A \ et \ (B \ ou \ C) \equiv (A \ et \ B) \ ou \ (A \ et \ C) \\ A \ ou \ (B \ et \ C) \equiv (A \ ou \ B) \ et \ (A \ ou \ C). \end{cases}$$

Preuve. Démontrons la première ligne en construisant, à partir des propositions et définitions précédentes, la table de vérité des deux assertions de part et d'autre du signe $\equiv$. Si ces tables sont identiques, alors on pourra affirmer que les deux assertions sont équivalentes. Comparons donc la dernière colonne de

A	B	C	B *ou* C	A *et* $(B$ *ou* $C)$
V	V	V	V	V
V	V	F	V	V
V	F	V	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	F
F	V	F	V	F
F	F	V	V	F
F	F	F	F	F

avec la dernière colonne de

A	B	C	A *et* B	A *et* C	$(A$ *et* $B)$ *ou* $(A$ *et* $C)$
V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	V
V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	F	F
F	V	V	F	F	F
F	V	F	F	F	F
F	F	V	F	F	F
F	F	F	F	F	F

Elles sont bien identiques, ce qui établit l'équivalence entre $A \ et \ (B \ ou \ C)$ et $(A \ et \ B) \ ou \ (A \ et \ C)$.

Vous pouvez vous tester et tenter de démontrer l'autre équivalence. Faites-le. Ensuite, revenez au livre et découvrez une autre manière de la prouver, laquelle utilise la première équivalence prouvée. En effet, en remplaçant A, B et C par leurs négations respectives, la première équivalence s'écrit

$$\begin{aligned} & non(A) \ et \ (non(B) \ ou \ non(C)) \\ & \equiv (non(A) \ et \ non(B)) \ ou \ (non(A) \ et \ non(C)). \end{aligned}$$