

# Table des matières

<b>1</b>	<b>CORPS DES NOMBRES RÉELS</b>	<b>17</b>
1.1	Suite de Cauchy . . . . .	18
1.1.1	Définitions . . . . .	18
1.1.2	Propriétés . . . . .	19
1.1.3	Non complétude de $\mathbf{Q}$ . . . . .	20
1.2	Structure de $\mathbf{R}$ . . . . .	21
1.2.1	Construction et définition de $\mathbf{R}$ . . . . .	21
1.2.2	Corps totalement ordonné $\mathbf{R}$ . . . . .	23
1.2.3	Immersion de $\mathbf{Q}$ dans $\mathbf{R}$ . . . . .	24
1.2.4	Corps archimédien complet $\mathbf{R}$ . . . . .	25
1.3	Unicité de $\mathbf{R}$ . . . . .	27
1.4	Propositions fondamentales . . . . .	27
1.5	Définition axiomatique . . . . .	31
1.6	Développements décimaux . . . . .	32
1.6.1	Suites adjacentes . . . . .	32
1.6.2	Valeurs approchées . . . . .	33
1.6.3	Développement décimal illimité . . . . .	34
1.6.4	Développement décimal illimité propre . . . . .	36
1.6.5	Non dénombrabilité de $\mathbf{R}$ . . . . .	37
1.6.6	Cas des rationnels . . . . .	38
1.7	Constante d'Euler . . . . .	39
1.8	Racine d'un nombre réel . . . . .	40
1.9	Algorithme de Babylone . . . . .	41
1.10	Exemple d'une suite particulière . . . . .	41
1.11	Exercices . . . . .	44

<b>2</b>	<b>CALCUL ASYMPTOTIQUE</b>	<b>51</b>
2.1	Comparaison des fonctions . . . . .	51
2.2	Échelle de comparaison . . . . .	54
2.2.1	Définitions . . . . .	54
2.2.2	Échelle classique . . . . .	55
2.3	Développements asymptotiques . . . . .	57
2.3.1	Définition . . . . .	57
2.3.2	Propriétés . . . . .	57
2.3.3	Exemples . . . . .	59
2.4	Développement asymptotique et calcul intégral . . . . .	61
2.5	Formule de Stirling . . . . .	64
2.6	Exercices . . . . .	67
<b>3</b>	<b>ESPACES VECTORIELS NORMÉS</b>	<b>75</b>
3.1	Généralités . . . . .	75
3.1.1	Définitions . . . . .	75
3.1.2	Espace métrique associé . . . . .	79
3.1.3	Suites . . . . .	82
3.1.4	Fonctions continues . . . . .	84
3.2	Espace de Banach . . . . .	87
3.2.1	Suite de Cauchy . . . . .	88
3.2.2	Propriétés liées à la complétude . . . . .	88
3.3	Espaces compacts . . . . .	89
3.3.1	Définitions des compacts . . . . .	89
3.3.2	Propriétés des compacts . . . . .	93
3.3.3	Compacts de $\mathbf{R}^n$ . . . . .	94
3.3.4	Compacité et continuité . . . . .	95
3.4	Espaces connexes . . . . .	97
3.5	Espace $\mathcal{L}_c(E, F)$ . . . . .	99
3.5.1	Applications linéaires continues . . . . .	99
3.5.2	Propriétés . . . . .	102
3.5.3	Applications bilinéaires continues . . . . .	106
3.6	Espaces vectoriels normés de dimension finie . . . . .	107
3.6.1	Normes équivalentes . . . . .	107
3.6.2	Propriétés . . . . .	108

3.6.3	Application linéaire dans un espace vectoriel normé de dimension finie . . . . .	111
3.7	Exercices . . . . .	112
<b>4</b>	<b>SÉRIES DANS LES ESPACES DE BANACH</b>	<b>121</b>
4.1	Généralités sur les séries . . . . .	121
4.1.1	Définition . . . . .	121
4.1.2	Critère de Cauchy . . . . .	123
4.1.3	Cas où $E$ est de dimension finie . . . . .	123
4.1.4	Séries absolument convergentes . . . . .	124
4.2	Rappels sur les séries numériques . . . . .	126
4.3	Séries numériques particulières . . . . .	132
4.3.1	Règle de Raabe et Duhamel . . . . .	132
4.3.2	Transformation d'Abel . . . . .	134
4.3.3	Séries commutativement convergentes . . . . .	135
4.3.4	Produit de deux séries . . . . .	137
4.4	Différentes notions de convergence . . . . .	140
4.4.1	Convergence simple et convergence uniforme . . . . .	140
4.4.2	Convergence normale . . . . .	145
4.4.3	Transformation d'Abel uniforme . . . . .	146
4.4.4	Convergence uniforme et continuité . . . . .	148
4.4.5	Convergence uniforme et intégration . . . . .	149
4.4.6	Convergence uniforme et dérivation . . . . .	150
4.4.7	Exemple : Étude de la fonction $\zeta$ de Riemann . . . . .	153
4.5	Exercices . . . . .	155
<b>5</b>	<b>FONCTIONS ANALYTIQUES</b>	<b>169</b>
5.1	Séries entières . . . . .	169
5.1.1	Rayon de convergence . . . . .	169
5.1.2	Propriétés des séries entières . . . . .	171
5.1.3	Fonctions développables en série entière . . . . .	173
5.1.4	Développements usuels . . . . .	176
5.1.5	Opérations algébriques . . . . .	177
5.2	Fonctions analytiques . . . . .	180
5.2.1	Définition . . . . .	180

5.2.2	Propriétés . . . . .	181
5.2.3	Théorèmes fondamentaux . . . . .	182
5.3	Fonctions holomorphes . . . . .	185
5.3.1	Définition . . . . .	185
5.3.2	Propriétés . . . . .	186
5.3.3	Holomorphie et analyticité . . . . .	187
5.4	Exponentielle dans une algèbre de Banach . . . . .	188
5.4.1	Algèbre de Banach . . . . .	188
5.4.2	Exponentielle . . . . .	188
5.4.3	Exponentielle d'endomorphisme . . . . .	191
5.4.4	Exponentielle de matrice . . . . .	192
5.5	Exercices . . . . .	194
<b>6</b>	<b>FONCTIONS DÉFINIES PAR UNE SÉRIE</b>	<b>205</b>
6.0.1	Introduction . . . . .	205
6.1	Exponentielle . . . . .	207
6.1.1	Première construction de l'exponentielle . . . . .	207
6.1.2	Deuxième construction de l'exponentielle . . . . .	209
6.2	Fonctions trigonométriques . . . . .	212
6.2.1	Fonction d'enroulement . . . . .	212
6.2.2	Fonctions cosinus et sinus . . . . .	212
6.2.3	Isomorphisme entre $\mathbf{U}$ et $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ . . . . .	215
6.2.4	Périmètre d'un cercle . . . . .	218
6.2.5	Calcul de $\pi$ . . . . .	218
6.2.6	Conclusion . . . . .	220
6.2.7	Trigonometrie complexe et trigonometrie hyperbolique . . . . .	220
6.2.8	Fonctions tangente et cotangente . . . . .	223
6.3	Logarithme complexe . . . . .	223
6.3.1	Détermination du logarithme . . . . .	223
6.3.2	Détermination principale du logarithme . . . . .	225
6.3.3	Fonctions usuelles sur $\mathbf{C}$ . . . . .	232
6.4	Fonctions $\zeta$ et $\eta$ . . . . .	250
6.4.1	Extension de la fonction $\zeta$ au champ complexe . . . . .	250
6.4.2	Fonction $\eta$ . . . . .	251
6.5	Séries et équations différentielles . . . . .	263

6.5.1	Équations différentielles linéaires d'ordre deux . . . . .	263
6.5.2	Fonctions de Bessel . . . . .	266
6.5.3	Fonctions de Legendre . . . . .	271
6.6	Exercices . . . . .	285
<b>7</b>	<b>CALCUL APPROCHÉ D'UNE INTÉGRALE</b>	<b>297</b>
7.1	Rappels sur les intégrales . . . . .	297
7.2	Méthode des rectangles . . . . .	299
7.2.1	Principe de la méthode des rectangles . . . . .	299
7.2.2	Majoration de l'erreur de la méthode des rectangles . . . . .	300
7.3	Méthodes classiques . . . . .	301
7.3.1	Principe de ces méthodes . . . . .	301
7.3.2	Interprétation graphique . . . . .	302
7.3.3	Erreur de ces méthodes . . . . .	304
7.3.4	Résumé . . . . .	307
7.3.5	Méthode du point médian . . . . .	307
7.3.6	Méthode des trapèzes . . . . .	309
7.3.7	Méthode de Simpson . . . . .	311
7.4	Nombres et polynômes de Bernoulli . . . . .	315
7.4.1	Définition des nombres et des polynômes de Bernoulli . . . . .	315
7.4.2	Propriétés des nombres et des polynômes de Bernoulli . . . . .	318
7.5	Formule sommatoire d'Euler-Maclaurin . . . . .	325
7.5.1	Formule sommatoire d'Euler-Maclaurin . . . . .	325
7.5.2	Application au calcul approché d'une intégrale . . . . .	328
7.5.3	Application au calcul approché de la constante d'Euler . . . . .	333
7.5.4	Application au calcul approché des valeurs de la fonction $\zeta$ . . . . .	336
7.6	Exercices . . . . .	340
<b>8</b>	<b>FONCTIONS DÉFINIES PAR UNE INTÉGRALE</b>	<b>363</b>
8.1	Changement de variable dans les intégrales . . . . .	363
8.2	Intégrale dépendant d'un paramètre . . . . .	366
8.2.1	Continuité . . . . .	367
8.2.2	Dérivabilité . . . . .	367
8.2.3	Extension à un intervalle non compact . . . . .	373
8.3	Fonctions Eulériennes . . . . .	375
8.3.1	Fonctions $\Gamma$ . . . . .	375

8.3.2	Fonctions bêta . . . . .	378
8.3.3	Propriétés des fonctions eulériennes . . . . .	379
8.3.4	Lien entre la fonction $\zeta$ et la fonction $\Gamma$ . . . . .	398
8.4	Étude d'un exemple . . . . .	401
8.5	Transformation de Laplace . . . . .	405
8.5.1	Introduction . . . . .	405
8.5.2	Généralités . . . . .	407
8.5.3	Transformée de Laplace des fonctions usuelles . . . . .	410
8.5.4	Propriétés de la transformée de Laplace . . . . .	412
8.6	Fonctions elliptiques . . . . .	445
8.6.1	Définition . . . . .	445
8.6.2	Fonctions elliptiques et pendule simple . . . . .	447
8.6.3	Fonction amplitude et trigonométrie elliptique . . . . .	450
8.6.4	Fonction sinus amplitude et pendule simple . . . . .	453
8.7	Exercices . . . . .	453
<b>9</b>	<b>SÉRIES DE FOURIER</b> . . . . .	<b>477</b>
9.0.1	Introduction . . . . .	477
9.1	Séries trigonométriques . . . . .	478
9.1.1	Généralités . . . . .	478
9.1.2	Expression des coefficients $a_n$ et $b_n$ . . . . .	479
9.1.3	Séries trigonométriques et séries entières . . . . .	480
9.1.4	Théorème d'Abel . . . . .	481
9.2	Coefficients et série de Fourier . . . . .	485
9.3	Convergence des séries de Fourier . . . . .	487
9.3.1	Inégalité de Bessel . . . . .	488
9.3.2	Théorème de Lebesgue . . . . .	492
9.3.3	Théorème de Dirichlet . . . . .	494
9.3.4	Complément . . . . .	501
9.3.5	Exemples . . . . .	503
9.4	Théorème de Parseval . . . . .	505
9.5	Extension au champ complexe . . . . .	508
9.5.1	Coefficients de Fourier complexes . . . . .	508
9.5.2	Propriétés dans le cas complexe . . . . .	509
9.6	Applications . . . . .	513

<i>TABLE DES MATIÈRES</i>	15
9.6.1 Application 1 . . . . .	513
9.6.2 Application 2 . . . . .	515
9.6.3 Application 3 . . . . .	517
9.6.4 Application 4 . . . . .	519
9.6.5 Application 5 . . . . .	520
9.6.6 Application 6 . . . . .	525
9.6.7 Application 7 . . . . .	526
9.6.8 Application 8 . . . . .	529
9.6.9 Application 9 . . . . .	531
9.7 Exercices . . . . .	533
<b>Bibliographie</b>	<b>547</b>
<b>Index</b>	<b>549</b>