Chapitre 1

CORPS DES NOMBRES RÉELS

INTRODUCTION

On suppose construits et connus $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$ (voir exercice 13) et $\mathbf{Q}$ (voir exercice 14).
Le corps commutatif $\mathbf{Q}$ présente certaines lacunes.

1. L'équation $x^2 = 2$ n'a pas de solution dans $\mathbf{Q}$. En effet, si il existe un rationnel $x = \dfrac{p}{q}$ avec p et q deux entiers de pgcd égal à 1, on aurait alors $p^2 = 2q^2$.

   En utilisant l'égalité de Bezout, il existe alors deux entiers u et v tels que $pu + qv = 1$, et donc, $p^2u + pqv = p$; d'où $2q^2u + pqv = p$.

   Alors, de $q(2qu + pv) = p$, on déduit que q divise p. Comme les deux entiers naturels p et q sont premiers entre eux, alors $q = 1$ ou q divise p tout en vérifiant q différent de 1.

   $q = 1$ implique $p^2 = 2$ (impossible dans $\mathbf{N}$)

   q divise p et $q \neq 1$ (impossible aussi car p et q sont premiers entre eux).

2. D'après ce qui précède, l'application $x \mapsto x^2 - 2$ ne s'annule pas dans $\mathbf{Q}$.

   Soit $A = \{x, x \in \mathbf{Q}, x^2 = 2\}$. Montrons que A ne possède pas de borne supérieure dans $\mathbf{Q}$.

   Supposons qu'il existe un rationnel a tel que $a = \sup A$. Alors, a est strictement positif et $a^2 < 2$ ou $a^2 > 2$.

   • Supposons $a^2 > 2$ et soit $r = a^2 - 2$.

   Quelque soit un rationnel strictement positif h, on a

   $(a - h)^2 = a^2 - 2ah + h^2 > a^2 - 2ah = r + 2 - 2ah.$

Prenons $h < \min\left(\frac{r}{2a}, a\right)$. On obtient $(a-h)^2 > 2$. Nous avons donc trouvé un rationnel $a-h$ majorant de A et plus petit strictement que la borne supérieure de A (impossible).

• Supposons $a^2 < 2$ et soit $r = 2 - a^2$.
Quelque soit un rationnel h strictement compris entre 0 et 1, on a
$(a+h)^2 = a^2+2ah+h^2 < a^2+2ah+h \leq 2+2ah+h-r \leq 2+(2a+1)h-r$.
Prenons $h < \min\left(\frac{r}{2a+1}, 1\right)$. On obtient $(a+h)^2 < 2$. Nous avons donc trouvé un rationnel $a+h$ de A qui est strictement supérieur à la borne supérieure de A (impossible).
Donc l'ensemble non vide majoré A n'admet pas de borne supérieure dans $\mathbf{Q}$.

3. Il existe des suites croissantes majorées de rationnels qui ne converge pas dans $\mathbf{Q}$ (voir 1.1.3).

Nous allons construire un ensemble qui puisse nous permettre de résoudre ces problèmes ; nous verrons d'ailleurs que ces trois types de difficultés rencontrées sont de nature équivalente.

1.1 Suite de Cauchy

1.1.1 Définitions

Définition 1 : $(\mathbf{K}, +, \times)$ est un corps commutatif totalement ordonné si :
i) $(\mathbf{K}, +, \times)$ est un corps commutatif
ii) $\mathbf{K}$ est muni d'une relation d'ordre total, notée $\leq$ compatible avec l'addition et la multiplication ; c'est-à-dire que :

$$\forall x, y, z \in \mathbf{K} \quad x \leq y \Rightarrow x+z \leq y+z$$
$$\forall\, z \geq 0, \quad x \leq y \Rightarrow x.z \leq y.z$$

Remarques :
Soit$(\mathbf{K}, +, \times)$ un corps commutatif totalement ordonné.

1) On pose $\forall x \in \mathbf{K} \quad |x| = $ max{x,-x}. On peut vérifier que $x \to |x|$ possède les propriétés usuelles des valeur absolues.

2) Dans la suite $\mathbf{K}$ est un corps commutatif totalement ordonné, dont l'élément neutre de la multiplication est noté 1.

3) L'ensemble $\{x \in \mathbf{K}, x \geq 0\}$ se note $\mathbf{K}_+$. L'ensemble $\{x \in \mathbf{K}, x > 0\}$ se note $\mathbf{K}_+^*$.

Définition 2 : Soit (u_n) une suite d'éléments de $\mathbf{K}$, on dit que (u_n) est une suite de Cauchy dans $\mathbf{K}$, si

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{K}_+^* \quad \exists n_0 \in \mathbf{N}, \ \forall n, p \in \mathbf{N}, \ n > p > n_0 \ \Rightarrow |u_n - u_p| < \varepsilon$$

Exemple : Toute suite constante est une suite de Cauchy.

1.1.2 Propriétés

Proposition 1 : Toute suite de cauchy est bornée.

Démonstration : Soit (u_n) une suite de Cauchy dans $\mathbf{K}$.
Prenons $\varepsilon = 1$, alors $\exists n_0 \in \mathbf{N}$ tel que $n > p > n_0 \ \Rightarrow |u_n - u_p| < 1$.
Fixons p. Alors, $\forall n > p \quad ||u_n| - |u_p|| \leq |u_n - u_p| < 1$.
D'où, $\forall n > p \quad |u_n| \leq 1 + |u_p|$.
Soit M défini par $M = \max\{|u_0|, |u_1|, ..., |u_p|, 1 + |u_p|\}$,
alors $\forall n \in \mathbf{N}$ $|u_n| \leq M$.

Proposition 2 : L'ensemble, noté $\mathcal{C}(\mathbf{K})$, des suites de Cauchy dans $\mathbf{K}$ est un anneau et un $\mathbf{K}$ espace vectoriel.

Démonstration :
On rappelle que $\mathcal{C}(\mathbf{K})$ est une partie non vide de l'ensemble noté $\mathcal{F}(\mathbf{K})$ des suites sur $\mathbf{K}$, que $\mathcal{F}(\mathbf{K})$ est un anneau et un $\mathbf{K}$ espace vectoriel, et que :
$\forall (u_n), (v_n) \in \mathcal{C}(\mathbf{K})$, (u_n) + (v_n)=$(u_n + v_n)$
$\forall (u_n), (v_n) \in \mathcal{C}(\mathbf{K})$, $(u_n) \times (v_n)$=$(u_n \times v_n)$
$\forall (u_n) \in \mathcal{C}(\mathbf{K}), \forall \alpha \in \mathbf{K}, \quad \alpha.(u_n) = (\alpha.u_n)$
Soit (u_n) et (v_n) deux suites de Cauchy dans $\mathbf{K}$.

• $\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*, \quad \exists n_0 \in \mathbf{N}, \ \forall n, p \in \mathbf{N}, \ n > p > n_0 \ \Rightarrow |u_n - u_p| < \dfrac{\varepsilon}{2}$
$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*, \quad \exists n_0' \in \mathbf{N}, \ \forall n, p \in \mathbf{N}, \ n > p > n_0' \ \Rightarrow |v_n - v_p| < \dfrac{\varepsilon}{2}$
donc, $\forall n > p >$max$\{n_0, n_0'\}$
$|u_n + v_n - (u_p + v_p)| \leq |u_n - u_p| + |v_n - v_p| \leq \varepsilon$.
Donc $(u_n + v_n)$ est une suite de Cauchy.

• $|u_n.v_n - (u_p.v_p)| = |(u_n - u_p).v_n| + |(v_n - v_p).u_p|$ et
$|(u_n - u_p).v_n| + |(v_n - v_p).u_p| \leq |u_n - u_p|.|v_n| + |v_n - v_p|.|u_p|$.
Les suites (u_n) et (v_n) sont bornées en tant que suites de Cauchy.
Donc, $\exists M \in \mathbf{K}_+, \quad \forall n \in \mathbf{N}\ |u_n| \leq M$ et $|v_n| \leq M$ d'où,
$|u_n.v_n - (u_p.v_p)| \leq M(|u_n - u_p| + |v_n - v_p|)$.
Or (u_n) et (v_n) sont deux suites de Cauchy dans $\mathbf{K}$, donc, à partir d'un certain rang on a
$|u_n - u_p| \leq \dfrac{\varepsilon}{2M}$ et $|v_n - v_p| \leq \dfrac{\varepsilon}{2M}$.
Donc $(u_n.v_n)$ est une suite de Cauchy.
• $\forall \alpha \in \mathbf{K}, \quad \alpha.(u_n) = (\alpha.u_n)$ et $(u_n.v_n)$ est une suite de Cauchy, (en particulier si $\forall n \in \mathbf{N}\ \ v_n = \alpha$), on obtient que $(\alpha.u_n)$ est une suite de Cauchy.
De plus, si $\alpha = -1$, alors $-1.(u_n) = -(u_n)$ est une suite de Cauchy et (1) est une suite de Cauchy, et donc, $\mathcal{C}(\mathbf{K})$ est un sous-anneau et un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbf{K})$.

Proposition 3 : Toute suite convergente dans $\mathbf{K}$ est une suite de Cauchy.

Démonstration :
Soit (u_n) une suite convergente dans $\mathbf{K}$. Alors, il existe $l \in \mathbf{K}$ tel que
$\forall \varepsilon \in \mathbf{K}_+^* \quad \exists n_0 \in \mathbf{N}\ \ \forall n \in \mathbf{N}\ n > n_0\ \Rightarrow |u_n - l| < \dfrac{\varepsilon}{2}$,
$\forall \varepsilon \in \mathbf{K}_+^* \quad \exists n_0 \in \mathbf{N}\ \ \forall m \in \mathbf{N}\ m > n_0\ \Rightarrow |u_m - l| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Or $|u_m - u_n| = |u_m - l + l - u_n| \leq |u_m - l| + |u_n - l|$ et donc,
$\forall \varepsilon \in \mathbf{K}_+^* \quad \exists n_0 \in \mathbf{N}\ \ \forall n, m \in \mathbf{N}\ n > m > n_0\ \Rightarrow |u_n - u_m| < \varepsilon$.

Définition 3 : Un corps commutatif totalement ordonné $\mathbf{K}$ est dit complet, si toute suite de Cauchy converge.

1.1.3 Non complétude de Q

Théorème 1 : $\mathbf{Q}$ est un corps commutatif totalement ordonné non complet.

Démonstration :
De la construction de $\mathbf{Q}$ à partir de $\mathbf{Z}$ (voir exercice 14), on déduit que $\mathbf{Q}$ est un corps commutatif totalement ordonné.
Soit (x_n) et (y_n) les deux suites dans $\mathbf{Q}$ définies par :

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \text{ et } y_n = x_n + \frac{1}{n!}.$$

On peut vérifier que (x_n) est strictement croissante et que (y_n) est strictement décroissante.

Donc $\forall m > p > n$ on a $x_n < x_p < x_m < y_m < y_p < y_n$

De plus $|x_n - x_p| < |x_n - y_n| \leq \frac{1}{n!}$, d'où (x_n) est une suite de Cauchy dans $\mathbf{Q}$.

Supposons que (x_n) soit une suite convergente dans $\mathbf{Q}$ et soit a sa limite.

En faisant tendre m vers l'infini dans $x_n < x_p < x_m < y_m < y_p < y_n$, on obtient :
$\forall n \in \mathbf{N} \quad x_n < x_p \leq a \leq y_p < y_n$, c'est-à-dire :

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad x_n < a < y_n.$$

Si a existe dans $\mathbf{Q}$, a peut s'écrire sous la forme $a = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbf{Z}^*$ et $q \in \mathbf{N}^*$.

Alors $x_q < \frac{p}{q} < y_q$, ou encore $x_q < \frac{p}{q} < x_q + \frac{1}{q!}$.

et donc $x_q.q! < (q-1)!.p < x_q.q! + 1$ (inégalité impossible dans $\mathbf{N}$).

Donc (x_n) est une suite de Cauchy dans $\mathbf{Q}$ non convergente.

1.2 Structure de R

1.2.1 Construction et définition de R

On rappelle que $\mathcal{C}(\mathbf{Q})$ est l'ensemble des suites de Cauchy de $\mathbf{Q}$.

Théorème 2 : L'ensemble $\mathcal{I}$ des suites de rationnels qui convergent vers 0 est un idéal de l'anneau $\mathcal{C}(\mathbf{Q})$. L'anneau quotient $\frac{\mathcal{C}(\mathbf{Q})}{\mathcal{I}}$ est un corps commutatif, appelé corps des nombres réels et est noté $\mathbf{R}$.

Démonstration :

Soit $\mathcal{C}'(\mathbf{Q})$ l'ensemble des suites convergentes de $\mathbf{Q}$. On a $\mathcal{C}'(\mathbf{Q}) \subset \mathcal{C}(\mathbf{Q})$.

i) Soit f l'application de $\mathcal{C}'(\mathbf{Q})$ qui à chaque suite (x_n) associe sa limite $\lim x_n$ dans $\mathbf{Q}$.

Alors, f est un morphisme d'anneaux et de $\mathbf{Q}$ espace vectoriel de $\mathcal{C}'(\mathbf{Q})$ dans $\mathbf{Q}$.

On a $\mathcal{I} =$ Ker f. En tant que noyau de morphisme, $\mathcal{I}$ est un sous-anneau de $\mathcal{C}'(\mathbf{Q})$, donc de $\mathcal{C}(\mathbf{Q})$.

Soit $(x_n) \in \mathcal{I}$ et $(y_n) \in \mathcal{C}(\mathbf{Q})$, (y_n) est bornée et comme (x_n) converge vers 0, alors $(x_n.y_n)$ converge vers 0.
Donc $(x_n.y_n) \in \mathcal{I}$, et $\mathcal{I}$ est un idéal de $\mathcal{C}(\mathbf{Q})$.
En conséquence $\dfrac{\mathcal{C}(\mathbf{Q})}{\mathcal{I}}$ est un anneau commutatif.
Montrons que $\dfrac{\mathcal{C}(\mathbf{Q})}{\mathcal{I}}$ est un corps commutatif.

ii) Soit $X \in \dfrac{\mathcal{C}(\mathbf{Q})}{\mathcal{I}}$ et $(x_n) \in X$.

Lemme : Soit (x_n) une suite de Cauchy de $\mathbf{Q}$ qui ne converge pas vers 0, alors $\exists (a, N) \in \mathbf{Q}_+^* \times \mathbf{N} \quad \forall n \geq N \ x_n \geq a$ ou $\forall n \geq N \ x_n \leq -a$.

Démonstration du lemme :
Supposons que $\forall (a, N) \in \mathbf{Q}_+^* \times \mathbf{N}$ / $\exists n \geq N \ x_n < a$ et $\exists p \geq N \ x_p > -a$.
$\forall \varepsilon \in \mathbf{Q}_+^*, \exists n_0 \in \mathbf{N},\ \forall n, p \in \mathbf{N},\ n > p > n_0 \ \Rightarrow |x_n - x_p| < \dfrac{\varepsilon}{3}$.
Prenons $a = \dfrac{\varepsilon}{3}$ et $N = n_0$
$\exists n'_0 \geq N,\ x_{n'_0} < \dfrac{\varepsilon}{3}$ et $\exists p'_0 \geq N$, $x_{p'_0} > -\dfrac{\varepsilon}{3}$.
Or $-\dfrac{\varepsilon}{3} < x_{n'_0} - x_{p'_0} < \dfrac{\varepsilon}{3}$ d'où $-2\dfrac{\varepsilon}{3} < x_{n'_0} < \dfrac{\varepsilon}{3}$ et donc $|x_{n'_0}| < 2\dfrac{\varepsilon}{3}$. De plus $\forall n > N \quad ||x_n| - |x_{n'_0}|| \leq |x_n - x_{n'_0}| < \dfrac{\varepsilon}{3}$.
On en déduit donc que $\forall n > N \quad |x_n| \leq |x_{n'_0}| + \dfrac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$, ce qui entraine que la limite de (x_n) serait 0, ce qui est impossible par hypothèse.

Montrons maintenant que dans $\mathbf{R}$ tout élément non nul admet un inverse.
Soit (x_n) une suite de Cauchy de rationnels qui ne converge pas vers 0. Il existe alors $(a, N) \in \mathbf{Q}_+^* \times \mathbf{N}$ tel que $\forall n \geq N \quad |x_n| \geq a$.
Soit (x'_n) la suite de rationnels définie par

$$\begin{cases} x'_n = & a \quad \text{pour } n < N \\ x'_n = & x_n \quad \text{pour } n \geq N \end{cases}$$

$\forall n \in \mathbf{N}$, $x'_n \in \mathbf{Q}$ et $(x_n) - (x'_n) \in \mathcal{I}$, donc $(x'_n) \in \mathcal{X}$, si on appelle $\mathcal{X}$ la classe de (x_n).
$\forall n \in \mathbf{N} \quad x'_n \neq 0$.
Soit (y_n) la suite d'éléments de $\mathbf{Q}$ définies par $y_n = \dfrac{1}{x'_n}$.

$y_n - y_p = \dfrac{x'_p - x'_n}{x'_n . x'_p}$ et donc $|y_n - y_p| \leq \dfrac{|x'_n - x'_p|}{a^2}$,
(y_n) est donc une suite de Cauchy.
Soit $\mathcal{Y}$ la classe de (y_n) dans $\dfrac{\mathcal{C}(\mathbf{Q})}{\mathcal{I}}$, alors $\mathcal{X}.\mathcal{Y}$=1 (1 étant par notation la classe dans $\mathbf{R}$ du nombre rationnel 1).

Remarque : On rappelle que si $\mathcal{I}$ est un idéal d'un anneau commutatif A, alors $\dfrac{A}{\mathcal{I}}$ est un corps si et seulement si $\mathcal{I}$ est un idéal maximal de A. En fait, on vient de démontrer que $\mathcal{I}$ est un idéal maximal de $\mathcal{C}(\mathbf{Q})$.
Notation :
On notera p la surjection $\mathcal{C}(\mathbf{Q}) \mapsto \mathbf{R}$.

1.2.2 Corps totalement ordonné R

Définition 4 : On appelle réel positif tout élément de l'ensemble, noté $\mathbf{R}_+$, défini par $\mathbf{R}_+ = p(\mathcal{C}_+)$ où $\mathcal{C}_+$ est l'ensemble des suites (x_n) de $\mathcal{C}(\mathbf{Q})$, vérifiant une des deux conditions suivantes :
1) $(x_n) \in I$.
2) $\exists n_0 \in \mathbf{N} \quad \forall n \in \mathbf{N},\ n > n_0 \Rightarrow\ x_n > 0$.

Interprétation : L'ensemble $\mathbf{R}_+$ est constitué par(0), noté 0 et les classes des suites de Cauchy de $\mathcal{C}(\mathbf{Q})$ dont le terme général est strictement positif à partir d'un certain rang.

Proposition 4 : La relation, notée $\leq$, définie par $X \leq Y$ si $Y - X \in \mathbf{R}_+$ est une relation d'ordre total compatible avec les opérations de $\mathbf{R}$, et donc $(\mathbf{R}, +, \times, \leq)$ est un corps commutatif totalement ordonné.

Démonstration :
Soit $X = p((x_n))$ et $Y = p((y_n))$.
$Y - X \in \mathbf{R}_+ = p(\mathcal{C}_+)$ et $Y - X = p((y_n - x_n))$.
• La relation $\leq$ est réflexive car si les suites (x_n) et (y_n) sont dans X, alors $(x_n - y_n) \in I$, donc à $\mathbf{R}_+$.
• La relation $\leq$ est antisymétrique car
$X \leq Y \Rightarrow Y - X \in \mathbf{R}_+$ et $Y \leq X \Rightarrow X - Y \in \mathbf{R}_+$ nous donne $(x_n - y_n) \in \mathcal{C}_+$ et $(y_n - x_n) \in \mathcal{C}_+$, et donc :
Si (premier cas)

$\exists n_0 \in \mathbf{N}, \quad \forall n \in \mathbf{N},\ n > n_0 \Rightarrow\ y_n - x_n > 0$ et
$\exists n_0' \in \mathbf{N}, \quad \forall n \in \mathbf{N},\ n > n_0 \Rightarrow\ x_n - y_n > 0,$
alors $\forall n > \max\{n_0, n_0'\},\ x_n - y_n > 0$ et $x_n - y_n < 0$ (impossible).
Si (deuxième cas) $x_n - y_n \in I$ alors $X = Y$.
Donc $X \leq Y$ et $Y \leq X$ implique que $X = Y$
• La relation $\leq$ est transitive car $X \leq Y$ et $Y \leq Z$ implique que $X \leq Z$ (on regarde les 4 possibilités), donc $\leq$ est une relation d'ordre
• La relation $\leq$ est une relation d'ordre total, car si $Y - X = p((y_n - x_n))$ et $X - Y = p((x_n - y_n))$,
1) soit $(x_n - y_n) \in I$ et alors $X = Y$.
2) soit $(x_n - y_n) \notin I$ et d'après le lemme du théorème 1, il existe $a \in \mathbf{Q}$ tel que à partir d'un certain rang, on ait :
Soit $x_n - y_n > a > 0$ où $x_n - y_n < -a < 0$ et donc, $X \leq Y$ où $Y \leq X$.
• La relation $\leq$ est compatible avec l'addition et la multiplication de $\mathbf{R}$, en revenant à la définition de $\mathbf{R}_+$, on vérifie facilement que $\mathbf{R}_+$ est compatible pour l'addition et que $\forall Z \in \mathbf{R}_+,\ X \leq Y \Rightarrow\ X.Z \leq Y.Z$

1.2.3 Immersion de Q dans R

Soit Ψ l'application de $\mathbf{Q}$ dans $\mathcal{C}(\mathbf{Q})$ qui à tout rationnel r associe la suite (r_n) définie par $\forall n \in \mathbf{N},\ r_n = r$.
L'application Ψ est un morphisme de l'anneau $\mathbf{Q}$ dans l'anneau $\mathcal{C}(\mathbf{Q})$.
Notons $\Theta = p \circ \Psi$. Alors Θ est un morphisme du corps $\mathbf{Q}$ dans le corps $\mathbf{R}$.
Soit r et r' deux éléments de $\mathbf{Q}$. Alors $\Theta(r) = \Theta(r')$ implique que la classe de (r_n) est égale à la classe de (r_n'), et donc que la suite $(r_n - r_n')$ converge vers 0, et en tant que suite constante, on déduit $r = r'$.
Donc Θ est un morphisme injectif de corps, d'où on peut identifier le corps commutatif $\mathbf{Q}$ au corps $\Theta(\mathbf{Q})$.
Mais Θ est-il un morphisme de corps ordonné ?
$\Psi(\mathbf{Q}_+) \subset \mathcal{C}_+$, donc $p(\Psi(\mathbf{Q}_+)) \subset p(\mathcal{C}_+)$, c'est-à-dire, $\Theta(\mathbf{Q}_+) \subset \mathbf{R}_+$.
De plus $x - y \in \mathbf{Q}_+ \Rightarrow \Theta(x) - \Theta(y) = \Theta(x - y) \in \mathbf{R}_+$, donc Θ est un morphisme de corps ordonné.

Interprétation : En tant que corps commutatif totalement ordonné, on peut donc identifier $\mathbf{Q}$ et $\Theta(\mathbf{Q})$. Si r et r' sont deux éléments de $\mathbf{Q}$, alors
$r + r'$ est associé bijectivement à $\Theta(r + r') = \Theta(r) + \Theta(r')$,