

# Table des matières

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Remerciements</b>  | <b>9</b>  |
| <b>Introduction</b>   | <b>11</b> |
| <b>1 Espace vectoriel, affine, projectif</b>                            | <b>13</b> |
| 1.1 Espace vectoriel . . . . .  | 13        |
| 1.2 Espace vectoriel euclidien . . . . .                                | 15        |
| 1.3 Produits usuels . . . . .   | 15        |
| 1.3.1 Produit scalaire usuel $\vec{\cdot}$ . . . . .                    | 15        |
| 1.3.2 Produit vectoriel dans $\mathcal{E}_3$ . . . . .                  | 16        |
| 1.3.3 Produit mixte . . . . .   | 17        |
| 1.4 Espace affine . . . . .   | 18        |
| 1.5 Espace projectif . . . . .  | 21        |
| 1.5.1 Définition et généralités . . . . .                               | 21        |
| 1.5.2 Complexification de l'espace affine $\mathcal{E}_3$ . . . . .     | 22        |
| 1.5.3 Fermeture projective de l'espace affine $\mathcal{E}_3$ . . . . . | 22        |
| <b>2 Applications linéaires</b>   | <b>23</b> |
| 2.1 Endomorphismes . . . . .  | 23        |
| 2.1.1 Définitions et généralités . . . . .                              | 23        |
| 2.1.2 Projections, affinités et symétries vectorielles . . . . .        | 25        |
| 2.1.3 Rotations vectorielles . . . . .                                  | 28        |
| 2.1.4 Homothéties vectorielles . . . . .                                | 28        |
| 2.2 Ecriture matricielle . . . . .                                      | 29        |
| 2.2.1 Généralités . . . . .   | 29        |
| 2.2.2 Le cas du plan vectoriel $\vec{\mathcal{P}}$ . . . . .            | 31        |
| 2.2.3 Le cas de l'espace vectoriel $\vec{\mathcal{E}}_3$ . . . . .      | 34        |
| 2.2.4 Matrice de changement de base . . . . .                           | 38        |
| <b>3 Applications affines</b>   | <b>41</b> |
| 3.1 Définition d'une application affine . . . . .                       | 41        |
| 3.2 Projection affine . . . . .   | 42        |
| 3.3 Transformations affines . . . . .                                   | 43        |
| 3.3.1 Définition commune au plan et à l'espace . . . . .                | 44        |

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| 3.3.2    | Rotations et affinités orthogonales planes . . . . .        | 46         |
| 3.3.3    | Rotations et affinités orthogonales dans l'espace . . . . . | 50         |
| 3.4      | Isométrie affine . . . . .                                  | 55         |
| <b>4</b> | <b>Courbes planes et gauches</b>                            | <b>57</b>  |
| 4.1      | Définitions et propriétés . . . . .                         | 57         |
| 4.2      | Courbes planes . . . . .                                    | 60         |
| 4.2.1    | Droites . . . . .   | 62         |
| 4.2.2    | Coniques euclidiennes . . . . .                             | 65         |
| 4.2.3    | Les courbes de Lamé et les superellipses . . . . .          | 84         |
| 4.2.4    | Courbure et cercle osculateur . . . . .                     | 85         |
| 4.3      | Courbes gauches . . . . .                                   | 90         |
| <b>5</b> | <b>Généralités sur les Surfaces</b>                         | <b>91</b>  |
| 5.1      | Surfaces paramétriques . . . . .                            | 91         |
| 5.2      | Surfaces implicites . . . . .                               | 92         |
| 5.3      | Gradient et normale . . . . .                               | 93         |
| 5.3.1    | Cas d'une surface paramétrique . . . . .                    | 93         |
| 5.3.2    | Cas d'une surface implicite . . . . .                       | 93         |
| 5.3.3    | Synthèse . . . . .  | 94         |
| 5.4      | Surfaces orientables . . . . .                              | 94         |
| 5.5      | Surfaces parallèles . . . . .                               | 96         |
| 5.6      | Propriétés métriques . . . . .                              | 97         |
| 5.6.1    | Première forme fondamentale . . . . .                       | 97         |
| 5.6.2    | Seconde forme fondamentale . . . . .                        | 98         |
| 5.6.3    | Directions principales et courbures . . . . .               | 98         |
| 5.6.4    | Surfaces minimales . . . . .                                | 100        |
| 5.7      | Surfaces de révolution . . . . .                            | 100        |
| 5.8      | Trièdre de Darboux-Ribaucour . . . . .                      | 101        |
| 5.9      | Surfaces anallagmatiques . . . . .                          | 101        |
| 5.10     | Conclusion . . . . .  | 102        |
| <b>6</b> | <b>Plans, quadriques</b>                                    | <b>103</b> |
| 6.1      | Plans affines . . . . .                                     | 103        |
| 6.2      | Surfaces quadriques . . . . .                               | 106        |
| 6.2.1    | Définition . . . . .  | 106        |
| 6.2.2    | Quadriques de rang 3 . . . . .                              | 107        |
| 6.2.3    | Quadriques dégénérées . . . . .                             | 109        |
| 6.2.4    | Les quadriques de révolution d'axe ( $Oz$ ) . . . . .       | 111        |
| 6.2.5    | Sphères orthogonales . . . . .                              | 112        |

|  |            |
|--|------------|
| <b>7 Applications projectives</b>  | <b>115</b> |
| 7.1 Transformations affines . . . . .  | 115        |
| 7.1.1 Définition des coordonnées homogènes dans $\widehat{\mathcal{E}}_3$ . . . . .    | 115        |
| 7.1.2 Transformations affines . . . . .  | 116        |
| 7.2 Transformations projectives dans $\widehat{\mathcal{E}}_3$ . . . . .               | 118        |
| 7.2.1 Définitions . . . . .  | 118        |
| 7.2.2 Matrice d'une transformation projective dans $\widehat{\mathcal{E}}_3$ . . . . . | 119        |
| 7.3 Inversion dans un espace affine . . . . .  | 120        |
| 7.3.1 Généralités . . . . .  | 120        |
| 7.3.2 Cercles et inversion dans le plan complexe . . . . .                             | 123        |
| <br>   |            |
| <b>8 Cyclides, supercyclides</b>   | <b>125</b> |
| 8.1 Les cyclides . . . . .   | 125        |
| 8.2 Les cyclides de Dupin quartiques . . . . .   | 126        |
| 8.2.1 Modes de génération et définitions . . . . .                                     | 126        |
| 8.2.2 Equations des cyclides de Dupin de degré 4 dans $\mathcal{E}_3$ . . . . .        | 127        |
| 8.2.3 Cyclides de Dupin quartiques particulières . . . . .                             | 128        |
| 8.2.4 Les cyclides de Dupin quartiques notées CD4 . . . . .                            | 132        |
| 8.2.5 Les cyclides de Dupin cubiques . . . . .   | 162        |
| 8.3 Les supercyclides . . . . .  | 162        |
| 8.3.1 Généralités . . . . .  | 162        |
| 8.3.2 Equations implicites des supercyclides quartiques . . . . .                      | 163        |
| 8.4 SE4 . . . . .  | 166        |
| 8.4.1 Définition et équations . . . . .  | 166        |
| 8.4.2 Ellipses principales des SE4s . . . . .  | 168        |
| 8.4.3 Propriétés différentielles du premier ordre des SE4s . . . . .                   | 170        |
| <br>   |            |
| <b>9 Surfaces non algébriques</b>  | <b>173</b> |
| 9.1 Superquadriques . . . . .  | 173        |
| 9.1.1 Historique . . . . .   | 173        |
| 9.1.2 Les différentes superquadriques . . . . .  | 173        |
| 9.1.3 Les superquadriques algébriques de révolution . . . . .                          | 175        |
| 9.2 Caténoïde . . . . .  | 181        |
| 9.3 Pseudosphère . . . . .   | 184        |
| <br>   |            |
| <b>10 Les deux types de jointures</b>  | <b>185</b> |
| 10.1 Définitions des deux types de jointures . . . . .                                 | 185        |
| 10.2 Exemples . . . . .  | 186        |
| <br>   |            |
| <b>11 Courbes de Bézier et hermitiennes</b>  | <b>189</b> |
| 11.1 Polynômes de Bernstein . . . . .  | 189        |
| 11.2 Courbes polynômiales . . . . .  | 191        |
| 11.2.1 Courbe de Bézier polynômiale . . . . .  | 191        |
| 11.2.2 Courbe de Bézier quadratique et arc de parabole . . . . .                       | 192        |

|           |   |            |
|-----------|---|------------|
| 11.2.3    | Courbes hermitiennes cubiques . . . . .             | 194        |
| 11.3      | Polynomial $\rightarrow$ rationnel . . . . .        | 196        |
| 11.4      | CBRQ . . . . .                                      | 197        |
| 11.4.1    | Définition . . . . .                                | 197        |
| 11.4.2    | CBRQ sous forme (quasi) standard . . . . .          | 199        |
| 11.4.3    | Modélisation d'arcs d'ellipses . . . . .            | 199        |
| 11.5      | Villarceau sur CD4 . . . . .                        | 214        |
| <b>12</b> | <b>CBRB</b>   | <b>215</b> |
| 12.1      | Définition . . . . .                                | 215        |
| 12.2      | Propriétés des CBRBs . . . . .                      | 216        |
| 12.3      | CBRQs sur CBRB . . . . .                            | 221        |
| <b>13</b> | <b>Jointure - CD4</b>                               | <b>223</b> |
| 13.1      | Méthode classique . . . . .                         | 223        |
| 13.2      | Principe de nos algorithmes . . . . .               | 224        |
| 13.3      | Cylindre (révolution)- plan . . . . .               | 225        |
| 13.4      | Surface (révolution) - plan . . . . .               | 228        |
| 13.4.1    | L'algorithme . . . . .                              | 229        |
| 13.4.2    | Exemples . . . . .                                  | 231        |
| 13.5      | Jointure Cône-cylindre-sphère . . . . .             | 232        |
| 13.5.1    | Jointure sphère-cylindre par une CD4 . . . . .      | 233        |
| 13.5.2    | Jointure cône-cylindre par une CD4 . . . . .        | 236        |
| 13.5.3    | Jointure cône-sphère . . . . .                      | 239        |
| 13.6      | Cas des quadriques non naturelles . . . . .         | 241        |
| 13.6.1    | Le problème et le choix du repère . . . . .         | 242        |
| 13.6.2    | Mise en équation et solution algébrique . . . . .   | 244        |
| 13.6.3    | Applications . . . . .                              | 245        |
| 13.7      | Exemples d'objets modélisés . . . . .               | 247        |
| 13.7.1    | Une antenne satellite . . . . .                     | 247        |
| 13.7.2    | Hugo . . . . .                                      | 251        |
| <b>14</b> | <b>Jointures - SE4</b>                              | <b>255</b> |
| 14.1      | Travail à réaliser . . . . .                        | 255        |
| 14.2      | Construction de type poteau . . . . .               | 258        |
| 14.3      | Construction de type récipient . . . . .            | 263        |
| <b>15</b> | <b>CD4 <math>\rightarrow</math> CBRB</b>            | <b>269</b> |
| 15.1      | Historique . . . . .                                | 270        |
| 15.1.1    | Algorithme de conversion de M. Pratt . . . . .      | 270        |
| 15.1.2    | Algorithme de conversion de K. Ueda . . . . .       | 272        |
| 15.2      | Améliorations de l'algorithme de M. Pratt . . . . . | 273        |
| 15.2.1    | Modification des poids . . . . .                    | 274        |
| 15.2.2    | Utilisation de transformations affines . . . . .    | 275        |

|                      |   |            |
|----------------------|---|------------|
| 15.2.3               | Combinaison des algorithmes . . . . .                         | 278        |
| 15.3                 | Algorithme barycentrique . . . . .                            | 279        |
| 15.4                 | Ueda et barycentre . . . . .                                  | 282        |
| 15.5                 | Comparaison des algorithmes . . . . .                         | 285        |
| 15.5.1               | Conversion d'un carreau de CD4 . . . . .                      | 286        |
| 15.5.2               | Conversion de toute une CD4 . . . . .                         | 286        |
| 15.6                 | CD4 de jointure . . . . .                                     | 289        |
| 15.6.1               | Jointure de type poteau . . . . .                             | 290        |
| 15.6.2               | Jointure de type récipient . . . . .                          | 291        |
| 15.7                 | Conversion de SE4 en CBRBs . . . . .                          | 292        |
| 15.8                 | Jointure $G^1$ de deux CBRBs . . . . .                        | 293        |
| <b>16</b>            | <b>CBRB <math>\rightarrow</math> CD4</b>                      | <b>295</b> |
| 16.1                 | Caractérisation d'une CD4 . . . . .                           | 295        |
| 16.1.1               | Si deux cercles opposés sont parallèles et non principaux . . | 295        |
| 16.1.2               | Si les cercles opposés ne sont pas parallèles deux à deux . . | 296        |
| 16.2                 | Construction du CBRB . . . . .                                | 297        |
| 16.3                 | Algorithmes de conversion . . . . .                           | 297        |
| 16.3.1               | Construction d'un CBRB non convertible en CD4 . . . . .       | 297        |
| 16.3.2               | Construction d'un CBRB convertible en CD4 . . . . .           | 300        |
| <b>Annexe</b>        | <b>Notations</b>  | <b>307</b> |
| <b>Bibliographie</b> |   | <b>309</b> |
| <b>Index</b>         |   | <b>313</b> |