# Chapitre 1

# Espace vectoriel, affine, projectif

Dans ce chapitre, après avoir effectué un rappel sur les espaces vectoriels (ensembles des vecteurs du plan ou de l'espace), les espaces affines (espaces de points) sont définis. Afin de simplifier les propriétés de certaines surfaces définies dans les espaces affines, les espaces projectifs sont introduits.

## 1.1 Espace vectoriel de dimension finie

**Définition 1** *: Espace vectoriel sur un corps commutatif*

*Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif [37, 46, 68] et $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ un ensemble, non vide, muni d'une loi de composition interne, notée $+$, et d'une loi de composition externe, notée $\bullet$.*

$\left(\overrightarrow{\mathcal{E}}\,;+;\bullet\right)$*, noté $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ par abus, est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ou un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ si :*

1. *La loi $+$ vérifie les propriétés suivantes :*
   - ♢ *associativité c'est-à-dire :*

     $$\forall\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v};\overrightarrow{w}\right)\in\overrightarrow{\mathcal{E}}^3,\ \left(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\right)+\overrightarrow{w}=\overrightarrow{u}+\left(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}\right)=\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}$$

   - ♢ *élément neutre $\overrightarrow{0}$ c'est-à-dire :*

     $$\forall\overrightarrow{u}\in\overrightarrow{\mathcal{E}},\quad \overrightarrow{u}+\overrightarrow{0}=\overrightarrow{0}+\overrightarrow{u}=\overrightarrow{u}$$

   - ♢ *symétrie c'est-à-dire :*

     $$\forall\overrightarrow{u}\in\overrightarrow{\mathcal{E}},\quad \exists\overrightarrow{u'}\in\overrightarrow{\mathcal{E}}\mid\overrightarrow{u}+\overrightarrow{u'}=\overrightarrow{u'}+\overrightarrow{u}=\overrightarrow{0}$$

   - ♢ *commutativité c'est-à-dire :*

     $$\forall\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}\right)\in\overrightarrow{\mathcal{E}}^2,\quad \overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}$$

2. *La loi de composition externe vérifie les propriétés suivantes :*
   - ♢ *pour tout $\overrightarrow{u}$ de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$, nous avons : $1\bullet\overrightarrow{u}=\overrightarrow{u}$.*

◊ *pour tout $\overrightarrow{u}$ de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$, pour tous* ***scalaires*** *$k_1$ et $k_2$ de $\mathbb{K}$, nous avons :*

$$\begin{array}{rcl} k_1 \bullet (k_2 \bullet \overrightarrow{u}) & = & (k_1 \times k_2) \bullet \overrightarrow{u} \\ (k_1 + k_2) \bullet \overrightarrow{u} & = & k_1 \bullet \overrightarrow{u} + k_2 \bullet \overrightarrow{u} \end{array}$$

◊ *pour tous $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$, pour tout scalaire $k$ de $\mathbb{K}$, nous avons :*

$$k \bullet (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = k \bullet \overrightarrow{u} + k \bullet \overrightarrow{v}$$

---

Dans la pratique, $\mathbb{K}$ sera la plupart du temps $\mathbb{R}$, mais il arrivera, parfois, que ce soit $\mathbb{C}$. S'il n'y a pas d'ambiguïté, le point notant la loi externe sera omis.

Ces ensembles vectoriels seront à la base de certaines transformations affines (translations, rotations, homothéties...) et à la base du calcul différentiel.

Deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de l'espace vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ sont **colinéaires** si il existe un scalaire $k$ non nul tel que $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{u}$. Le vecteur nul, noté $\overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{0}_{\overrightarrow{\mathcal{E}}}$, est colinéaire à tout vecteur.

Une base d'un espace vectoriel est la donnée d'une famille $(\overrightarrow{e_i})_{i\in I}$ de vecteurs non colinéaires telle que tout vecteur $\overrightarrow{u}$ puisse s'écrire, de façon unique, comme une somme finie de produits entre un scalaire et un élément de la base, appelée **combinaison linéaire**, c'est-à-dire que nous avons :

$$\overrightarrow{u} = \sum_{i\in I} k_i \overrightarrow{e_i}$$

où seulement un **nombre fini** de $k_i$ est non nul. Les scalaires $(k_i)_{i\in I}$ s'appellent les **composantes** du vecteur $\overrightarrow{u}$ dans la base $(\overrightarrow{e_i})_{i\in I}$. La **dimension de l'espace vectoriel** est le cardinal de $I$. Notons que nous ne considérons que des espaces vectoriels de **dimension finie** c'est-à-dire que le cardinal de $I$ est un élément de $\mathbb{N}$ et ne dépend pas des vecteurs de la base considérée. $\overrightarrow{u}\,(k_1; k_2; \cdots; k_n)$ désigne le vecteur $\overrightarrow{u}$ de composantes $(k_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$

**Définition 2** *: Sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel*

*Une partie, $\overrightarrow{\mathcal{E}_1}$, non vide d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ est un sous-espace vectoriel de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ si :*

$$\left\{\begin{array}{rcl} \forall\,(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}) \in \overrightarrow{\mathcal{E}_1}^2,\ \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} & \in & \overrightarrow{\mathcal{E}_1} \\ \forall\,(k;\overrightarrow{u}) \in \mathbb{K} \times \overrightarrow{\mathcal{E}_1},\ k\overrightarrow{u} & \in & \overrightarrow{\mathcal{E}_1} \end{array}\right.$$

---

**Définition 3** *: Sous-espaces vectoriels en somme directe*

*Soit $\overrightarrow{\mathcal{E}_1}$ et $\overrightarrow{\mathcal{E}_2}$ deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{E}}$.*

*Notons $\overrightarrow{\mathcal{E}_1} + \overrightarrow{\mathcal{E}_2} = \left\{\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v},\ \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{E}_1} \text{ et } \overrightarrow{v} \in \overrightarrow{\mathcal{E}_2}\right\}$.*

*$\overrightarrow{\mathcal{E}_1}$ et $\overrightarrow{\mathcal{E}_2}$ sont en somme directe, notée $\overrightarrow{\mathcal{E}_1} \oplus \overrightarrow{\mathcal{E}_2}$, si :*

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \overrightarrow{\mathcal{E}_1} & + & \overrightarrow{\mathcal{E}_2} & = & \overrightarrow{\mathcal{E}} \\ \overrightarrow{\mathcal{E}_1} & \cap & \overrightarrow{\mathcal{E}_2} & = & \left\{\overrightarrow{0}_{\overrightarrow{\mathcal{E}}}\right\} \end{array}\right.$$

---

Des compléments d'algèbre linéaire sont disponibles dans [68, 46].

## 1.2 Espace vectoriel euclidien

Un produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique définie positive [68]. Un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire, noté $\bullet$, est appelé **espace vectoriel euclidien** et il est alors possible de définir la notion de base orthonormée après avoir introduit la notation :

**Notation 1** *: Symbole de Kronecker $\delta_{ij}$*
*Si $i = j$, alors $\delta_{ij} = \delta_{ii} = 1$ et si $i \neq j$, alors $\delta_{ij} = 0$.*

**Définition 4** *: Définition de base orthonormée*
*Une base $(\overrightarrow{e_i})_{i\in I}$ d'un espace vectoriel euclidien est orthonormée si :*

$$\forall\,(i;j) \in I^2,\ \overrightarrow{e_i} \bullet \overrightarrow{e_j} = \delta_{ij}$$

---

Dans la suite, $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ (resp. $\overrightarrow{\mathcal{E}_3}$) est le plan vectoriel (resp. l'espace vectoriel) euclidien usuel de dimension $2$ (resp. $3$), défini sur le corps $\mathbb{R}$, et une base orthonormée sera constituée de deux vecteurs $\overrightarrow{\imath}$ et $\overrightarrow{\jmath}$ (resp. trois vecteurs $\overrightarrow{\imath}$, $\overrightarrow{\jmath}$ et $\overrightarrow{k}$) et nous avons $\overrightarrow{\mathcal{P}} = \mathbb{R}\overrightarrow{\imath} \oplus \mathbb{R}\overrightarrow{\jmath}$ (resp. $\overrightarrow{\mathcal{E}_3} = \mathbb{R}\overrightarrow{\imath} \oplus \mathbb{R}\overrightarrow{\jmath} \oplus \mathbb{R}\overrightarrow{k}$).

## 1.3 Produits usuels

### 1.3.1 Produit scalaire usuel

**Définition 5** *: Produit scalaire usuel*
*Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan vectoriel (resp. de l'espace vectoriel) de composantes respectives $(x;y)$ et $(x';y')$ (resp. $(x;y;z)$ et $(x';y';z')$) dans la base orthonormée $(\overrightarrow{\imath};\overrightarrow{\jmath})$ (resp. $\left(\overrightarrow{\imath};\overrightarrow{\jmath};\overrightarrow{k}\right)$).*

*Le produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est le nombre réel noté $\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v}$ (ou $\langle\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\rangle$) défini,*

*dans le plan par :*

$$\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = x \times x' + y \times y'$$

*dans l'espace par :*

$$\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = x \times x' + y \times y' + z \times z'$$

---

**Définition 6** *: Norme usuelle*
*Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur du plan vectoriel (resp. de l'espace vectoriel) de composantes $(x;y)$ (resp. $(x;y;z)$ ) dans la base orthonormée $(\overrightarrow{\imath};\overrightarrow{\jmath})$ (resp. $\left(\overrightarrow{\imath};\overrightarrow{\jmath};\overrightarrow{k}\right)$).*

*La norme de $\overrightarrow{u}$ est la racine carrée de $\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{u}$ c'est-à-dire que nous avons les expressions analytiques,*

| *dans le plan :* | *dans l'espace :* |
|---|---|
| $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}$ | $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ |

### 1.3.2 Produit vectoriel dans $\overrightarrow{\mathcal{E}_3}$

Nous nous donnons une orientation sur $\overrightarrow{\mathcal{E}_3}$ [41] et nous admettons que la notion d'angle orienté est connue [45, 41].

**Définition 7** *: Définition du produit vectoriel, noté $\times$ ou $\wedge$*
*Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace $\overrightarrow{\mathcal{E}_3}$.*

1. *Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires alors $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.*
2. *Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires :*
   (a) *La direction de $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ est la direction orthogonale au plan déterminé par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.*
   (b) *Le sens de $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ est donné par la règle de la main droite, figure 1.1.*
   (c) $\|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \left|\sin\left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right)\right|$

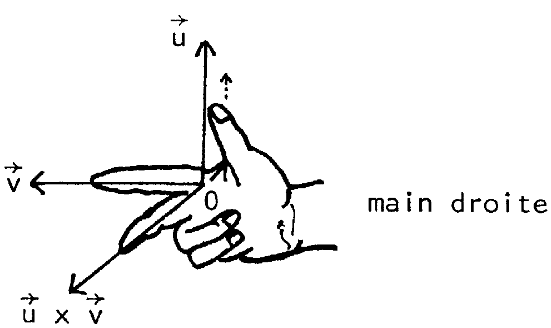


FIG. 1.1 – Règle de la main droite

Si la base $\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$ est orthonormée directe alors $\overrightarrow{k} = \overrightarrow{\imath} \times \overrightarrow{\jmath}$, $\overrightarrow{\imath} = \overrightarrow{\jmath} \times \overrightarrow{k}$, et $\overrightarrow{\jmath} = \overrightarrow{k} \times \overrightarrow{\imath}$.

**Proposition 1** *: Propriétés du produit vectoriel*
*Soit $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{E}_3}$. Les propriétés du produit vectoriel sont :*

1. *anti-commutativité :* $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = -\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u}$.
2. *distributivité :* $\overrightarrow{u} \times (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{w}$ *et* $(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) \times \overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u} + \overrightarrow{w} \times \overrightarrow{u}$.

3. *multiplication par un scalaire :*

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \overrightarrow{u} \times (\lambda \bullet \overrightarrow{w}) = (\lambda \bullet \overrightarrow{u}) \times \overrightarrow{w} = \lambda \bullet (\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{w})$$

---

**Notation 2** *: Déterminant d'ordre* $2$

*Soit deux couples* $(a; b)$ *et* $(c; d)$. *Le* ***déterminant*** *de* $(a; b)$ *et* $(c; d)$ *est :*

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \tag{1.1}$$

Remarquons que :

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \tag{1.2}$$

Si le déterminant de $(a; b)$ et $(c; d)$ est nul alors les couples $(a; b)$ et $(c; d)$ sont proportionnels et si ces couples représentent les composantes de deux vecteurs du plan alors ces deux vecteurs sont colinéaires.

**Théorème 1** *:*

*Si, dans la base* $\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$ *orthonormée directe, nous avons* $\overrightarrow{u}\,(x; y; z)$ *et* $\overrightarrow{v}\,(x', y', z')$, *alors :*

$$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} \left( \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} ; - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \right) \tag{1.3}$$

---

Un moyen mnémotechnique est d'écrire le déterminant sous la forme d'un **déterminant** $3 \times 3$ et de le développer par rapport à la première colonne :

$$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\imath} & x & x' \\ \overrightarrow{\jmath} & y & y' \\ \overrightarrow{k} & z & z' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \overrightarrow{\imath} - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} \overrightarrow{\jmath} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \overrightarrow{k} \tag{1.4}$$

### 1.3.3 Produit mixte

**Définition 8** *: Définition du produit mixte*

*Soit* $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ *et* $\overrightarrow{w}$ *trois vecteurs de l'espace vectoriel* $\overrightarrow{\mathcal{E}_3}$ *dans une base orthonormée.*

*Le produit mixte des trois vecteurs* $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ *et* $\overrightarrow{w}$ *est :*

$$\det(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}; \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \bullet (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}) \tag{1.5}$$

---

**Remarque 1** *: Quels que soient les trois vecteurs* $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ *et* $\overrightarrow{w}$ *de* $\overrightarrow{\mathcal{E}_3}$, *nous avons :*

$$\overrightarrow{u} \bullet (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{v} \bullet (\overrightarrow{w} \times \overrightarrow{u}) = \overrightarrow{w} \bullet (\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v})$$

## 1.4 Espace affine

**Définition 9** *: espace affine*

*Un ensemble $\mathcal{E}$ est appelé espace affine [20, 3] attaché au $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{E}}$, de dimension $n$, si il existe une application $\varphi$ définie par :*

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathcal{E} \times \mathcal{E} & \longrightarrow & \overrightarrow{\mathcal{E}} \\ & (\Omega; M) & \longmapsto & \varphi(\Omega; M) = \overrightarrow{\Omega M} \end{array}$$

*et vérifiant :*

1. *pour tout point $\Omega$ de $\mathcal{E}$, l'application $\varphi_\Omega$ définie de $\mathcal{E}$ dans $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ par :*

$$\varphi_\Omega(M) = \varphi(\Omega; M) = \overrightarrow{\Omega M}$$

   *est bijective ;*

2. *pour tous points $A$, $B$ et $C$, la relation de Chasles $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$ est vérifiée.*

---

Un espace affine peut aussi être défini d'une autre manière comme, par exemple, à partir du groupe des translations de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ opérant de façon simplement transitive sur $\mathcal{E}$ [65, 52]. Cette définition a l'avantage de faciliter la détermination des propriétés projectives d'un espace affine.

Concrètement, un espace affine usuel $\mathcal{E}$ peut être interprété comme la donnée d'un espace vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ et d'un point $\Omega$ : ainsi, nous pouvons noter $\mathcal{E} = \Omega + \overrightarrow{\mathcal{E}}$ c'est-à-dire que pour tout point $M$ de $\mathcal{E}$, il existe un et un seul vecteur $\overrightarrow{u}$ de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ tel que $\overrightarrow{\Omega M} = \overrightarrow{u}$. La dimension de $\mathcal{E}$ est alors la dimension de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$.

**Définition 10** *: sous-espace affine*

*Soit $\mathcal{E}_1$ un sous-ensemble non vide de l'espace affine $\mathcal{E}$ d'espace vectoriel associé $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ et $\Omega_1$ un point de $\mathcal{E}_1$. $\mathcal{E}_1$ est un* ***sous-espace affine*** *de $\mathcal{E}$ si il existe un sous-espace vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{E}_1}$ de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ tel que :*

$$\forall M_1 \in \mathcal{E}_1,\ \overrightarrow{\Omega_1 M_1} \in \overrightarrow{\mathcal{E}_1}$$

*et $\overrightarrow{\mathcal{E}_1}$ est appelé sous-espace vectoriel directeur de $\mathcal{E}_1$.*

---

Notons que la définition de sous-espace affine ne dépend pas du point $\Omega_1$ choisi [3, 11].

Un repère d'un espace affine $\mathcal{E}$ d'**espace vectoriel associé** $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ est la donnée d'un point $O$ de $\mathcal{E}$ et d'une base de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$. Les coordonnées du point $M$ dans ce repère sont les composantes du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans cette base. Dans le plan affine $\mathcal{P}$ (resp. espace affine $\mathcal{E}_3$), les coordonnées seront notées $(x; y)$ (resp. $(x; y; z)$).

Si $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ est un **espace vectoriel euclidien**, alors $\mathcal{E}$ est un **espace affine euclidien** et nous pouvons alors définir une distance sur cet espace.

**Définition 11** *: Distance dans un espace affine*

*Soit $A$ et $B$ deux points d'un plan affine (resp. de l'espace affine) de coordonnées respectives $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$ (resp. $(x_A; y_A; z_A)$ et $(x_B; y_B; z_B)$) dans le repère orthonormé $(O; \overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{\jmath})$ (resp. $\left(O; \overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{\jmath}; \overrightarrow{k}\right)$).*

*La distance usuelle entre $A$ et $B$, notée $AB$, est la norme usuelle du vecteur $\overrightarrow{AB}$ c'est-à-dire que nous avons les expressions analytiques :*

1. *dans le plan,*
$$AB = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$
2. *dans l'espace,*
$$AB = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

---

**Définition 12** *: barycentre de $n$ points pondérés*

*Pour $i$ appartenant à l'intervalle d'entiers $[\![1; n]\!]$, nous considérons $n$ points $P_i$, affectés d'un poids $w_i$, d'un espace affine $\mathcal{E}$.*

*Si $\sum_{i=1}^{n} w_i \neq 0$ alors le barycentre des $n$* ***points pondérés*** *$(P_i; w_i)$, noté $G$, est défini comme l'unique point vérifiant :*

$$\sum_{i=1}^{n} w_i \overrightarrow{GP_i} = \overrightarrow{0} \tag{1.6}$$

*et si les poids sont tous égaux, $G$ est appelé* ***isobarycentre*** *des $n$ points $P_i$.*

---

Cette notion permettra plus tard de caractériser les applications affines, définition 29, dans un espace affine. Donnons la définition d'une droite dans un espace affine.

**Définition 13** *: droite affine, segment*

*Soit $P_1$ et $P_2$ deux points distincts d'un espace affine $\mathcal{E}$.*

*La droite affine $(P_1 P_2)$ (resp. le segment $[P_1 P_2]$) est l'ensemble des barycentres des points $(P_1; t)$ et $(P_2; 1 - t)$, lorsque $t$ décrit $\mathbb{R}$ (resp. $[0; 1]$).*

---

Il est possible de définir la fonction vectorielle de Leibniz :

**Définition 14** *: fonction vectorielle de Leibniz*

*Soit n points pondérés $(P_i; w_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ d'un espace affine $\mathcal{E}$ vérifiant la condition $\sum_{i=1}^{n} w_i \neq 0$. La fonction vectorielle de Leibniz est :*

$$\begin{array}{llll} f_L : & \mathcal{E} & \longrightarrow & \overrightarrow{\mathcal{E}} \\ & M & \longmapsto & f_L(M) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} w_i \overrightarrow{MP_i} \end{array} \tag{1.7}$$

---

Il est possible de définir la fonction vectorielle de Leibniz lorsque la somme des coefficients est nulle [37], mais nous avons choisi de laisser ce cas de côté.

Pour tous points $O$ et $M$ de l'espace affine $\mathcal{E}$, nous avons :

$$f_L(M) = \sum_{i=1}^{n} w_i \overrightarrow{MP_i} = \sum_{i=1}^{n} w_i \left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OP_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} w_i \overrightarrow{MO} + \sum_{i=1}^{n} w_i \overrightarrow{OP_i}$$

d'où :

$$f_L(M) = \left(\sum_{i=1}^{n} w_i\right) \overrightarrow{MO} + f_L(O)$$

et nous pouvons énoncer le théorème qui permet d'adapter la relation de Chasles aux calculs barycentriques :

**Théorème 2** *: Fonction vectorielle de Leibniz et calculs barycentriques*

*Soit n points pondérés* $(P_i; w_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ *d'un espace affine* $\mathcal{E}$ *vérifiant la condition* $\sum_{i=1}^{n} w_i \neq 0$. *Alors :*

$$\forall (M; O) \in \mathcal{E}^2, \quad f_L(M) = \left(\sum_{i=1}^{n} w_i\right) \overrightarrow{MO} + f_L(O) \tag{1.8}$$

---

Le théorème 2 permet d'obtenir le corollaire 1 qui sera très utile lors de la définition des courbes de Bézier, chapitre 11, et surfaces de Bézier, chapitre 12. En effet, ce théorème permet d'obtenir des définitions de ces courbes de façon indépendante de l'origine et peut permettre aussi certains abus de notations.

**Corollaire 1** *: Fonction vectorielle de Leibniz et calcul barycentrique*

*Soit n points pondérés* $(P_i; w_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ *d'un espace affine* $\mathcal{E}$ *vérifiant la condition* $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$. *Alors :*

$$\forall (M; O) \in \mathcal{E}^2, \quad f_L(M) = \overrightarrow{MO} + f_L(O) \tag{1.9}$$

---

<u>Démonstration :</u>

D'après le théorème 2, $f_L(M) = \left(\sum_{i=1}^{n} w_i\right) \overrightarrow{MO} + f_L(O)$ d'où $f_L(M) = \overrightarrow{MO} + f_L(O)$ car $\sum_{i=0}^{n} w_i = 1$.

■

Il apparaît immédiatement que le barycentre est indépendant de l'ordre des points pondérés. De plus, le barycentre est inchangé si un nombre de points pondérés, dont la somme des poids est le nombre non nul $w'$, est remplacé par leur barycentre affecté du poids $w'$.