# Chapitre 1

# Pourcentages et moyennes

*C'est même étonnant comme le cerveau humain est mal adapté aux calculs.*
Jean-Paul Delahaye

*Les statistiques ont une particularité majeure : elles ne sont jamais les mêmes selon qu'elles sont avancées par un homme de gauche ou par un homme de droite.*
Jacques Mailhot

*Dans 95 % des occasions où ils n'ont rien à dire, 99 % des commentateurs sportifs donnent des statistiques.*

Les procédés permettant de tromper, de manipuler, voire de mentir, en utilisant les statistiques, ne nécessitent pas tous une sophistication avancée. Il n'est pas besoin de recourir au raisonnement bayésien (voir section 5.6), aux statistiques multivariées, aux séries temporelles ou à quelque autre monstre mathématique pour trouver des moyens de mentir sans mentir, de faire dire aux chiffres ce qu'on veut. Au contraire, les concepts les plus élémentaires des statistiques dites « descriptives » fournissent déjà au fourbe mille moyens de manipulation. Les pourcentages et les moyennes, que nous connaissons tous, que nous pensons tous comprendre en profondeur, sont bien suffisants.

Tous les lycéens et tous les étudiants savent calculer sans peine leur moyenne. Qu'ils soient littéraires, éminemment réfractaires à toute abstraction mathématique, cela n'y changera rien : aucun ne reste interdit par le calcul de la moyenne de ses notes. Tout le monde comprend, ou croit comprendre du moins, une phrase comme « Grande braderie : – 15 % sur tout le magasin ». Que pourrait-il bien y avoir de mystérieux derrière une telle annonce ? rien, du moment qu'on a bien saisi qu'il s'agit d'une réduction des prix et non du magasin lui-même…

Et pourtant, des choses à peine plus compliquées que cela mènent à des erreurs de compréhension généralisées. Les premiers à exploiter ces interprétations fautives et prévisibles sont les conseillers en communication, qui recherchent, parmi les différentes présentations possibles des chiffres, celle qui fera l'impression voulue sur l'auditoire. Il ne s'agit pas à proprement parler de trahison, mais de manipulation et de tromperie. Les contrevérités ne sont pas affirmées, mais suggérées par une présentation *ad hoc* de la réalité. Les journalistes ne sont pas en reste, soit qu'ils s'égarent eux-mêmes, soit qu'ils cèdent à la facilité pour rendre spectaculaire ce qui ne l'est pas.

## 1.1 Augmentations en chaîne

Les pourcentages donnent un moyen commode et en apparence très intuitivement accessible de comprendre les variations d'une quantité. Une augmentation de 100 %, c'est ce qui se produit quand une grandeur double. Lorsque les prix sont réduits de 33 %, on comprend qu'on paiera un tiers de moins. Tout cela est tellement parlant, et tellement visuel qu'on voit mal où les erreurs pourraient se glisser.

Les notions de pourcentage et de proportionnalité, qui sont liées, sont introduites dès l'école primaire, au « cycle 3 » comme on écrit dans les textes officiels (autrement dit, entre le CE2 et le CM2). Ces questions ne quittent plus les écoliers, puis les collégiens et les lycéens. En fin de terminale, un élève a ainsi entendu parler de pourcentage, a calculé des pourcentages et résolu des exercices portant sur iceux, pendant près de 10 ans… Sans compter l'entraînement intensif extra-scolaire amené par les soldes monstres, les folles braderies et les promotions en tout genre, les offres spéciales (20 % de produit en plus), et les innombrables occurrences des pourcentages dans les actualités (augmentation de la dette, par exemple, ou indice de satisfaction, cote des hommes politiques, etc.). Sans compter que les cours d'histoire et de géographie présentent aussi leur lot de proportions. Pour un concept aussi élémentaire mathématiquement que les pourcentages, on pourrait au moins s'attendre à ce qu'un tel entraînement soit suffisant.

Et pourtant… les mêmes erreurs, constatées par les didacticiens dès le primaire, perdurent tant qu'on en voit plus la fin. Au collège, au lycée, les mêmes exercices risiblement triviaux pour un ordinateur, posent d'immenses difficultés à bien des élèves. À l'université chez les étudiants en sciences humaines, même au niveau « master » ; dans les IUFM chez les futurs professeurs des écoles, on retrouve encore très largement les conceptions trompeuses à l'origine des mêmes bêtises. Et ceux qui finissent par ne plus commettre de sottises appliquent des principes qu'ils ont admis, mais pas toujours assimilés. C'est que la statistique est par moments *très* antinaturelle. D'ailleurs, Joseph Klatzman raconte de nombreuses anecdotes prouvant que les meilleurs statisticiens de France sont eux aussi intrigués, et parfois induits en erreur, par des statistiques formellement élémentaires[1].

Mais assez de théorie. Passons maintenant à quelques exemples.

> « Le chômage a augmenté de 10 % entre 2003 et 2004, puis de 5 % entre 2004 et 2005. Quelle est en pourcentage l'augmentation du chômage entre 2003 et 2005 ? »

L'erreur fréquente (car erreur fréquente il y a) est de raisonner fallacieusement « en pourcentage », en disant 10 % + 5 % = 15 %, donc comme si le « % » était une unité de

1. Joseph Klatzman, *Attention statistiques !,* La découverte, 1999.

grandeur, à l'instar du mètre ou de la seconde. On imagine donc que l'augmentation est de 15 %, ce qui est faux.

Le paradoxe est résolu quand on prend en compte le fait que « 10 % » n'est pas une quantité fixe. On peut parler de 10 % *de quelque chose*, par exemple d'un prix. Mais « 10 % » tout seul n'est pas une valeur, ce n'est pas un prix, pas une grandeur associée à une unité.

Pour trouver le bon résultat à notre problème de départ, on peut raisonner par exemple en partant d'une grandeur initiale de 100. Puisqu'elle augmente de 10 %, elle passe à 110. Si elle augmente encore de 5 %, c'est le 110, et non le 100, qu'il faut considérer pour cette seconde augmentation. Or, 5 % de 110, c'est 5,5 et non pas 5 tout court. Il faut donc ajouter 5,5 à nos 110, ce qui nous fait passer à 115,5. Passer de 100 à 115,5, c'est ajouter 15,5 % et non pas 15 %. La bonne réponse est donc 15,5 %.

Une autre manière de voir la chose est de dire qu'une augmentation de 10 % est une multiplication par 1,10. En effet, si l'on ajoute 10 % à une quantité, on obtient alors 110 % de cette quantité. Mais 110 %, c'est 1,10 (110/100). De même, ajouter 5 %, c'est multiplier par 1,05. Les deux augmentations consécutives ont donc pour effet de multiplier la quantité initiale par 1,10 × 1,05 = 1,155, ce qui correspond à une augmentation de 15,5 %.

> « Entre 2002 et 2003, le pouvoir d'achat a diminué de 12 %, mais il a repris 12 % entre 2003 et 2004. Les associations de consommateurs se réjouissent du retour en 2004 au niveau de 2002. »

On a l'impression que le pouvoir d'achat est ainsi revenu à son niveau initial, parce que ses variations se sont finalement annulées. Il n'en est rien, même si l'évolution globale entre 2002 et 2004 n'est pas énorme.

L'erreur provient du fait que l'on ne tient pas compte de quelque chose d'important : la première variation, diminution de 12 %, est calculée sur le pouvoir d'achat de 2002. Au contraire, l'augmentation de 12 % entre 2003 et 2004 est déterminée par rapport au pouvoir d'achat de 2003. Or, ce pouvoir d'achat-là est plus faible que le premier, puisqu'entre-temps il a diminué. Ainsi, les 12 % de la seconde variation sont-ils plus faibles que les 12 % du début.

On peut calculer exactement ce qui se produit. Supposons un pouvoir d'achat de 100 en 2002. En 2003, il est donc de 100 – 12, soit 88, puisque 12 % de 100 font 12.

12 % de 88, en revanche, ne font pas 12 mais 10,56. Et le nouveau pouvoir d'achat est donc de 88 + 10,56, soit 98,56. Autrement dit, entre 2002 et 2004, le pouvoir d'achat a perdu 1,44 point, autrement dit 1,44 % (la valeur de départ étant 100).

> « Chaque année depuis 20 ans, le poids moyen des adolescents augmente de 2 %, soit une augmentation globale de 40 %[1] »

**Tableau 1 —Effet d'une augmentation régulière de 2 % par an pendant 20 ans (quantité initiale année 0 : 100).**

| année | augmentation (%) | nouvelle valeur |
|---|---|---|
| 1 | 2,00 | 102,00 |
| 2 | 2,04 | 104,04 |
| 3 | 2,08 | 106,12 |
| 4 | 2,12 | 108,24 |
| … | … | …. |
| 18 | 2,80 | 142,82 |
| 19 | 2,86 | 145,68 |
| 20 | 2,91 | 148,59 |

1. Il s'agit bien sûr de valeurs imaginaires.

On ne peut pas, vous l'avez maintenant bien compris, additionner les augmentations en pourcentage. Une augmentation de 2 % correspond à une multiplication par 1,02. Supposons par exemple un poids moyen de 100 au départ de la double décennie. Le tableau 1 (partiel), que vous pourrez vérifier simplement, donne les valeurs de ce poids pour les années 1 à 20 (après augmentation).

L'augmentation globale est donc de 48,59 %, soit près de 50 %. C'est assez différent des 40 % annoncés. Ceux qui ont déjà contracté un prêt immobilier connaissent bien ce phénomène : un taux annuel apparemment dérisoire vous donne, au bout de 20 ou 25 ans, des intérêts cumulés aussi élevés que la somme empruntée (mais le cas des prêts est plus complexe que notre exemple).

> « La dette de la France, qui avait augmenté de 15 % l'an passé, n'a augmenté cette année que de 14 %. Le gouvernement se félicite de sa gestion exemplaire. »

Dans une annonce comme celle-ci, il n'y a pas — et c'est d'ailleurs le cas le plus courant — de réel mensonge *objectif.* La phrase suggère que le déficit (augmentation de la dette) a diminué. Cela est, d'un certain point de vue, vrai. Mais il s'agit bien entendu d'un point de vue très particulier : le déficit a décru *en pourcentage de la dette.*

La question à se poser dans un tel cas est : est-ce vraiment l'information pertinente ? Lorsque je m'interroge sur le déficit du pays, ce qui m'intéresse, c'est peut-être de savoir de combien il est en euros, donc en valeur absolue, et non pas en valeur relative.

Supposons par exemple une dette de départ de 100 milliards d'euros. Un an plus tard, on nous dit qu'elle a augmenté de 15 %, passant donc à 115 milliards. Cela nous fait un déficit de 15 milliards. L'année qui suit, cette dette augmente de 14 %, passant donc à 115 × 1,14 = 131,1. L'augmentation est donc maintenant de 131,1 – 115 = 16,1 milliards. Autrement dit, la dette a *plus* augmenté cette année que l'année précédente.

Selon la couleur politique de votre quotidien préféré, et celle du gouvernement en place, vous pourrez donc y lire :

> Diminution du déficit : l'augmentation de la dette (15 % l'an dernier) est réduite à 14 % cette année.
> ou alors :
> Augmentation du déficit : de 15 milliards l'an passé, il dépasserait cette année 16 milliards d'euros.

Et les deux informations sont rigoureusement justes…

Il ne suffit pas de constater qu'une incompréhension est fréquente. Il ne suffit pas de dire « les gens ont tort ». Ce qui est intéressant dans un cas comme celui-ci, c'est de comprendre *pourquoi* la plupart des humains (peut-être tous ?) ont de telles difficultés à bien saisir le fonctionnement d'un concept comme celui de pourcentage. Et la réponse (partielle) la plus évidente tient en deux points :

- les augmentations ou comparaisons faites avec des pourcentages renvoient à des *multiplications*, non à des additions. « Ajouter » 5 %, c'est *multiplier* par 1,05. Or, additionner est plus naturel que multiplier ;
- si la valeur de départ est différente, la même augmentation en pourcentage ne donne pas la même augmentation absolue. « Ajouter 6 % » ça peut être ajouter 5, ou 6, ou 12 selon le cas. Or, il est naturel de considérer le signe « % » comme le symbole d'une unité, et donc 6 % comme une *valeur* fixe.

Le deuxième point est bien évidemment lié au premier. Dit autrement il exprime le fait que, si l'on veut, contre