Chapitre 1

Les suites

1.1 Le résumé du cours

Une **suite numérique** est une fonction u définie sur $\mathbb{N}$ ou une partie de $\mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour tout entier naturel n, $u(n)$ s'écrit u_n qui est un **terme** de la suite. La suite u s'écrit (u_n).

Les différents types de suites

Soit f une fonction numérique.

- Les suites définies explicitement en fonction de n : $u_n = f(n)$.
- Les suites définies par une somme : $u_n = \sum_{k=0}^{n} f(k)$.
- Les suites définies par récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 \in \mathbb{R}$.

Les suites arithmétiques

$\star$ (u_n) est une suite **arithmétique** de raison r si, et seulement si, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + r$.

$\star$ Si (u_n) est une **suite arithmétique** de raison r alors, pour tout entier naturel n et pour tout entier naturel p, on a : $u_n = u_p + (n-p)\,r$.

Cas particuliers : $u_n = u_0 + nr$ et $u_n = u_1 + (n-1)\,r$.

⋆ **Somme** des termes consécutifs d'une suite arithmétique :

$$u_p + u_{p+1} + ... + u_{d-1} + u_d = \frac{(u_p + u_d)(d - p + 1)}{2}.$$

⋆ *Cas particulier* : $1 + 2 + 3 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Les suites géométriques

⋆ (u_n) est une suite **géométrique** de raison q si, et seulement si, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = qu_n$.

⋆ Si (u_n) est une suite **géométrique** de raison q alors, pour tout entier naturel n et pour tout entier naturel p, on a : $u_n = u_p q^{n-p}$.
Cas particuliers : $u_n = u_0 q^n$ et $u_n = u_1 q^{n-1}$.

⋆ **Somme** des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q :

$$u_p + u_{p+1} + ... + u_{d-1} + u_d = u_p \frac{1 - q^{d-p+1}}{1 - q} \ (q \neq 1).$$

⋆ Cas particulier : $1 + q + q^2 + ... + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ $(q \neq 1)$.

Sens de variation d'une suite

Pour étudier le sens de variation de la suite (u_n), on peut calculer $u_{n+1} - u_n$ pour tout entier naturel n, puis déterminer le signe de cette expression.

- Si $u_{n+1} - u_n \geq 0$ alors $u_{n+1} \geq u_n$ donc la suite (u_n) est **croissante.**
- Si $u_{n+1} - u_n \leq 0$ alors $u_{n+1} \leq u_n$ donc la suite (u_n) est **décroissante**.
- Si $u_{n+1} - u_n = 0$ alors la suite (u_n) est **constante.**

Cas d'une suite définie explicitement en fonction de n : $u_n = f(n)$

⋆ Si la fonction f est croissante sur $[0; +\infty[$ alors la suite (u_n) est croissante.

⋆ Si la fonction f est décroissante sur $[0; +\infty[$ alors la suite (u_n) est décroissante.

Suite minorée, majorée ou bornée

$\star$ (u_n) est **majorée** s'il existe un réel M tel que, pour tout entier naturel n, $u_n \leq M$.

$\star$ (u_n) est **minorée** s'il existe un réel m tel que, pour tout entier naturel n, $m \leq u_n$.

$\star$ (u_n) est **bornée** si elle est majorée et minorée.

$\star$ (u_n) est une suite **périodique** de période p ($p \in \mathbb{N}^*$) lorsque pour tout entier naturel n, $u_{n+p} = u_n$.

Une suite croissante est minorée par son premier terme et une suite décroissante est majorée par son premier terme.

La limite d'une suite

$\star$ Une suite (u_n) tend vers $+\infty$ si, pour tout réel M, l'intervalle $[M; +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On écrit :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty.$$

$\star$ Une suite (u_n) tend vers $-\infty$ si, pour tout réel M, l'intervalle $]-\infty; M]$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On écrit :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty.$$

$\star$ Une suite (u_n) tend vers un réel ℓ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On écrit :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell.$$

On dit alors que la suite est **convergente**.

Une suite qui n'est pas convergente est dite **divergente**.

Limite d'une suite géométrique

- Si $|q| < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.
- Si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.
- Si $q = 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 1$.
- Si $q \leq -1$ alors (q^n) n'a pas de limite.

Cas d'une suite définie explicitement en fonction de n

$$u_n = f(n)$$

Si la suite (u_n) est définie explicitement en fonction de n, on utilise :

$$\left.\begin{array}{r} u_n = f(n) \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell \end{array}\right\} \text{donc } \lim_{n \to +\infty} u_n = \ell \ (\ell \text{ est fini ou infini}).$$

Les théorèmes de comparaison

– Si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$ et s'il existe un entier n_0 tel que, pour tout entier $n \geq n_0$, $u_n \geq v_n$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

– Si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$ et s'il existe un entier n_0 tel que, pour tout entier $n \geq n_0$, $u_n \leq v_n$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

Le théorème des gendarmes

Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites. Si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \ell$, $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \ell$ (ℓ fini) et s'il existe un entier naturel n_0 tel que, pour tout entier $n \geq n_0$, on a :

$$v_n \leq u_n \leq w_n$$

alors (u_n) converge et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$.

La convergence des suites monotones

– Une suite **croissante et majorée** est convergente.

– Une suite **décroissante et minorée** est convergente.

– Si (u_n) est une suite **croissante** (resp. décroissante) et **non majorée** (resp. minorée) alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ (resp. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$).

1.2 Les exercices

1.2.1 Polynésie 2013 - Niveau 1 -

Thèmes et compétences abordés :

Suite définie par récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction homographique. Utilisation des théorèmes de convergence monotone. Suite géométrique. Limite d'une suite. Démonstration par récurrence.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et telle que pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n}.$$

1. **(a)** Calculer u_1 et u_2.

   (b) Démontrer que pour tout entier naturel n, $0 < u_n$.

2. On admet que pour tout entier naturel n, $u_n < 1$.

   (a) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

   (b) Démontrer que la suite (u_n) converge.

3. Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \dfrac{u_n}{1-u_n}$.

   (a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison 3.

   (b) Exprimer pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.

   (c) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{3^n}{3^n+1}$.

   (d) Déterminer la limite de la suite (u_n).

1.2.2 Antilles-Guyane 2012 - Niveau 1 -

Thèmes et compétences abordés :

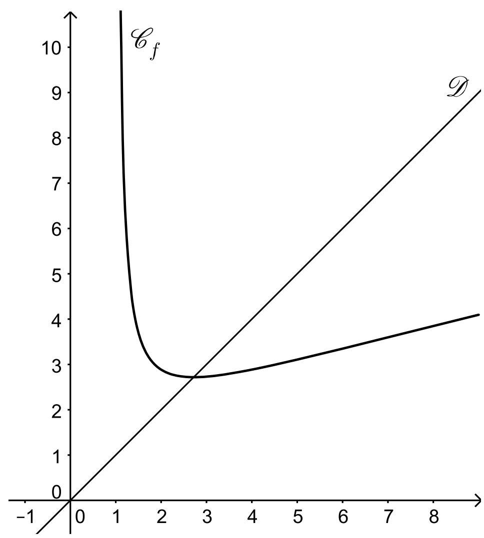
Suite définie par récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$. Étude d'une fonction. Construction des premiers termes de la suite et conjectures. Utilisation des théorèmes de convergence monotone. Lecture d'un algorithme. Démonstration par récurrence.

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]1;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x}{\ln(x)}.$$

On a tracé ci-dessous dans un repère orthogonal la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f ainsi que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$.



1. Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en 1.

2. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $]1;+\infty[$.

3. En déduire que si $x \geq e$ alors $f(x) \geq e$.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

1. Sur la figure précédente, en utilisant la courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite $\mathscr{D}$, placer les points A_0, A_1 et A_2 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_0, u_1 et u_2. On laissera apparents les traits de construction. Quelles conjectures peut-on faire sur les variations et la convergence de la suite (u_n) ?

2. **(a)** Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geq e$.

(b) Déterminer les variations de la suite (u_n).

(c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

(d) Déterminer sa limite ℓ.

3. On donne l'algorithme suivant :

Début
  Affecter à x **la valeur** 5
  Affecter à y **la valeur** 0
  Tant Que $x > 2.72$ **Faire**
    Affecter à x **la valeur** $\dfrac{x}{\ln(x)}$
    Affecter à y **la valeur** $y + 1$
  Fin de Tant Que
  Afficher y
Fin

À l'aide du tableau suivant, obtenu avec un tableur, déterminer la valeur affichée par l'algorithme.

n	0	1	2	3	4	5
u_n	5	3.110667467	2.74065253	2.71837263	2.718281830	2.71828182

1.2.3 Antilles-Guyane 2010 - Niveau 1 -

Thèmes et compétences abordés :

Suite récurrente linéaire d'ordre 2 : $u_{n+2} = f(u_{n+1}, u_n)$.
Suite géométrique, suite arithmétique et suite définie par une somme.
Démonstration par récurrence.

On considère la suite de nombres réels (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = -1,\ u_1 = \frac{1}{2} \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n.$$

1. Calculer u_2 et en déduire que la suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

2. On définit (v_n) en posant, pour tout entier naturel n :

$$v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n.$$

(a) Calculer v_0.

(b) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.

(c) En déduire que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

(d) Exprimer v_n en fonction de n.

3. On définit (w_n) en posant, pour tout entier naturel n : $w_n = \dfrac{u_n}{v_n}$.

(a) Calculer w_0.

(b) En utilisant l'égalité $u_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}u_n$, exprimer w_{n+1} en fonction de u_n et de v_n.

(c) En déduire que pour tout entier naturel n, on a :

$$w_{n+1} = w_n + 2.$$

(d) Exprimer w_n en fonction de n.

4. Montrer que pour tout entier naturel n : $u_n = \dfrac{2n-1}{2^n}$.

5. Pour tout entier naturel n, on pose : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

Démontrer par récurrence que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $S_n = 2 - \dfrac{2n+3}{2^n}$.
