Chapitre 1

Les suites

1.1 Réaliser une démonstration par récurrence

Pour démontrer qu'une proposition est vraie pour tout entier naturel n, on utilise souvent une démonstration par récurrence qui se réalise en trois étapes :

Initialisation :

On prouve que la proposition est vraie pour $n = 0$.

Hérédité :

Soit n un entier naturel quelconque. On suppose que la proposition est vraie pour cet entier naturel n, on montre alors qu'elle est vraie pour l'entier naturel suivant $n + 1$.

Conclusion :

La proposition est vraie pour tout entier naturel.

Exemple

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n - 1 \end{cases}$.

Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n = (n-1)^2$.

Initialisation :

$u_0 = 1 = (0-1)^2$ donc la proposition est vraie pour $n = 0$.

Hérédité :

Soit n un entier naturel. Supposons que $u_n = (n-1)^2$.

Par définition de la suite, $u_{n+1} = u_n + 2n - 1$ et, en utilisant l'hypothèse de récurrence, on obtient : $u_{n+1} = (n-1)^2 + 2n - 1 = n^2$.

Conclusion :

Pour tout entier naturel n, $u_n = (n-1)^2$.

Exemple

Démontrons que, pour tout entier naturel non nul n, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\,(n+1)}{2}.$$

Initialisation :

$\displaystyle\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1\,(1+1)}{2}$ donc la proposition est vraie pour $n = 1$.

Hérédité :

Soit n un entier naturel non nul. Supposons que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\,(n+1)}{2}$.

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k = (n+1) + \sum_{k=1}^{n} k$ et, en utilisant l'hypothèse de récurrence,

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k = n+1+\frac{n\,(n+1)}{2} = \frac{2\,(n+1)+n\,(n+1)}{2} = \frac{(n+2)\,(n+1)}{2}.$

Conclusion :

Pour tout entier naturel non nul n, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\,(n+1)}{2}$.

1.2 Étudier le sens de variation d'une suite

En étudiant le signe de $u_{n+1} - u_n$

Pour étudier le sens de variation de la suite (u_n), on calcule pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n$ puis on détermine le signe de cette expression.

⋆ Si $u_{n+1} - u_n \geq 0$ alors $u_{n+1} \geq u_n$ donc la suite (u_n) est croissante.

⋆ Si $u_{n+1} - u_n \leq 0$ alors $u_{n+1} \leq u_n$ donc la suite (u_n) est décroissante.

⋆ Si $u_{n+1} - u_n = 0$ alors la suite (u_n) est constante.

Exemple

Étudions le sens de variation de la suite (u_n) définie par $u_n = 2 - \dfrac{1}{n}$.

Pour tout entier naturel non nul n, $u_{n+1} - u_n = 2 - \dfrac{1}{n+1} - \left(2 - \dfrac{1}{n}\right)$.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n\,(n+1)}.$$

Comme n est un entier naturel non nul, $n(n+1) > 0$.

On en déduit que $u_{n+1} - u_n \geq 0$ donc la suite (u_n) est croissante.

Exemple

Étudions le sens de variation de la suite (u_n) définie par :

$$u_0 \in \mathbb{R} \text{ et } u_{n+1} = u_n - 2n - 1.$$

Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = -2n - 1$.
Comme n est un entier naturel, $-2n - 1 < 0$.
Ainsi $u_{n+1} - u_n \leq 0$ donc la suite (u_n) est décroissante.

En étudiant le sens de variation d'une fonction f

On considère une suite définie explicitement en fonction de n.

Autrement dit, la suite est définie par $u_n = f(n)$.

On étudie alors les variations de la fonction f sur $[0; +\infty[$.

$\star$ Si la fonction f est croissante sur $[0; +\infty[$ alors la suite (u_n) est croissante.

$\star$ Si la fonction f est décroissante sur $[0; +\infty[$ alors la suite (u_n) est décroissante.

Exemple

Étudions le sens de variation de la suite (u_n) définie par :

$$u_n = \frac{\ln(n)}{n}.$$

Soit f la fonction définie sur $[1; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$.

Pour tout x de $[1; +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{1 - \ln(x)}{x^2}$.

Si $x \geq e$ alors $\ln(x) \geq 1$ donc $f'(x) \leq 0$.

La fonction f est décroissante sur $[3; +\infty[$.

$u_1 = 0$, $u_2 = \dfrac{\ln(2)}{2} \simeq 0.347$ et $u_3 = \dfrac{\ln(3)}{3} \simeq 0.366$.

On en déduit que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 3.

En utilisant une démonstration par récurrence

Pour étudier le sens de variation d'une suite définie par récurrence, on peut être amené à effectuer une démonstration par récurrence.

Exemple

Étudions le sens de variation de la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 0.5 \text{ et } u_{n+1} = u_n^2 .$$

Pour cela, montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n,

$$0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1.$$

Initialisation :
$u_1 = 0.25$ et $u_0 = 0.5$ donc $0 \leq u_1 \leq u_0 \leq 1$.
Hérédité :
Soit n un entier naturel. Supposons que $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1$.
La fonction $x \mapsto x^2$ est croissante sur $[0; 1]$ donc $0^2 \leq u_{n+1}^2 \leq u_n^2 \leq 1^2$.
Par suite, $0 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq 1$.
Conclusion :
Pour tout entier naturel n, $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1$.
La suite (u_n) est donc décroissante.

1.3 Prouver qu'une suite est minorée, majorée ou bornée

En utilisant le sens de variation de la suite

Une suite croissante est minorée par son premier terme et une suite décroissante est majorée par son premier terme.

Exemple

Reprenons l'exemple de la section 1.2.2. concernant la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{\ln(n)}{n}$.
Nous avons prouvé que : $u_1 = 0$, $u_2 \simeq 0.347$ et $u_3 \simeq 0.366$ et que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 3. On en déduit que, pour tout entier naturel n, $u_n \leq u_3$.
Par suite, (u_n) est majorée par $\dfrac{\ln(3)}{3}$.
De plus, $n \geq 1$ implique $\ln(n) \geq 0$ donc $u_n \geq 0$.
Finalement la suite (u_n) est bornée.
Pour tout entier naturel non nul n, on a : $0 \leq u_n \leq \dfrac{\ln(3)}{3}$.

En utilisant une démonstration par récurrence

<u>**Exemple**</u>
Montrons par récurrence que la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 2 \text{ et } u_{n+1} = \frac{3}{4 - u_n}$$

est minorée par 1 et majorée par 3.
<u>Initialisation</u> :
$u_0 = 2$ donc $1 \leq u_0 \leq 3$.
<u>Hérédité</u> :
Soit n un entier naturel. Supposons que $1 \leq u_n \leq 3$.
On a $-3 \leq -u_n \leq -1$ donc $1 \leq 4 - u_n \leq 3$ d'où $\dfrac{1}{3} \leq \dfrac{1}{4 - u_n} \leq 1$.
En multipliant par 3, on obtient : $1 \leq u_{n+1} \leq 3$.
<u>Conclusion</u> :
Pour tout entier naturel n, $1 \leq u_n \leq 3$.

1.4 Calculer la limite d'une suite

En utilisant les théorèmes sur la limite d'une somme, d'une différence, d'un produit ou d'un quotient

<u>**Exemple**</u>
Déterminons la limite de la suite (u_n) définie par :

$$u_n = 2n^2 + n + 1 + \frac{1}{n}.$$

$\lim\limits_{n \to +\infty} 2n^2 = +\infty$, $\lim\limits_{n \to +\infty} n + 1 = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ donc :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty \text{ (limite d'une somme).}$$

<u>**Exemple**</u>
Déterminons la limite de la suite (u_n) définie par :

$$u_n = \frac{e^{-n} + 1}{n + 3}.$$

$\lim\limits_{n \to +\infty} e^{-n} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(e^{-n} + 1\right) = 1$ (limite d'une somme).
De plus, $\lim\limits_{n \to +\infty} n + 3 = +\infty$ donc :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{e^{-n} + 1}{n + 3} = 0 \text{ (limite d'un quotient).}$$

On pensera à utiliser, en présence d'une suite géométrique de raison q, le théorème :

$\star$ Si $|q| < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.

$\star$ Si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.

$\star$ Si $q = 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 1$.

$\star$ Si $q \leq -1$ alors (q^n) n'a pas de limite.

Exemple

Déterminons la limite de la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{3^n+1}{4^n+5}$.

Pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{3^n\left(1+\frac{1}{3^n}\right)}{4^n\left(1+\frac{5}{4^n}\right)} = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n \times \dfrac{1+\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1+5\left(\frac{1}{4}\right)^n}$.

Les nombres $\dfrac{3}{4}$, $\dfrac{1}{3}$ et $\dfrac{1}{4}$ appartiennent à $]-1;1[$ donc :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n = 0.$$

On en déduit que :

$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1+5\left(\frac{1}{4}\right)^n} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{3}{4}\right)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

En utilisant une fonction

Si la suite (u_n) est définie explicitement en fonction de n, on utilise :

$$\left.\begin{array}{c} u_n = f(n) \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell \end{array}\right\} \text{donc } \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \ (\ell \text{ est fini ou infini}).$$

Exemple

Déterminons la limite de la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{3n^2-2n+1}{n+3}$.

$$\text{Posons } f(x) = \frac{3x^2-2x+1}{x+3}.$$

La limite en $+\infty$ d'une fonction rationnelle égale celle du rapport des monômes de plus haut degré donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 3x = +\infty$.

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exemple

Déterminons la limite de la suite (u_n) définie par $u_n = n - e^n$.

Posons, pour tout x strictement positif, $f(x) = x - e^x = x\left(1 - \dfrac{e^x}{x}\right)$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ (par théorème) donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \dfrac{e^x}{x}\right) = -\infty$.

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$, on obtient $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ (limite d'un produit).
On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

En utilisant les théorèmes de comparaison ou le théorème des gendarmes

⋆ Si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$ et s'il existe un entier n_0 tel que, pour tout entier $n \geq n_0$, on a $u_n \geq v_n$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

⋆ Si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$ et s'il existe un entier n_0 tel que, pour tout entier $n \geq n_0$, on a $u_n \leq v_n$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

⋆ Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites. Si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \ell$ (ℓ fini) et s'il existe un entier naturel n_0 tel que, pour tout entier $n \geq n_0$, on a $v_n \leq u_n \leq w_n$ alors (u_n) converge et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$.

Exemple

Déterminons la limite de la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{\sin\left(n^2\right)}{n}$.
Pour tout n de $\mathbb{N}$, $-1 \leq \sin\left(n^2\right) \leq 1$.
Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $-\dfrac{1}{n} \leq \dfrac{\sin\left(n^2\right)}{n} \leq \dfrac{1}{n}$.
$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-\dfrac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ donc, en utilisant le théorème des gendarmes, on obtient : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\sin\left(n^2\right)}{n} = 0$.

Exemple

Déterminons la limite de la suite (u_n) définie par $u_n = 4n + (-1)^n$.
Pour tout n de $\mathbb{N}$, $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ donc $4n - 1 \leq u_n$.
Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} (4n - 1) = +\infty$, en utilisant un théorème de comparaison, on obtient : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(4n + (-1)^n\right) = +\infty$.

1.5 Montrer qu'une suite est convergente

⋆ Si (u_n) est **croissante** et **majorée** alors (u_n) est convergente.

⋆ Si (u_n) est **décroissante** et **minorée** alors (u_n) est convergente.

⋆ Si (u_n) est **croissante** et **non majorée** alors elle diverge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exemple

Montrons que la suite (u_n) définie par $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2}$ est convergente.
Dans un premier temps, nous chercherons le sens de variation de (u_n).
Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)^2}$ donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$.
On en déduit donc que la suite (u_n) est croissante.
Montrons maintenant que la suite (u_n) est majorée.
Pour tout k compris entre 2 et n, on a :
$k \geq k-1$ donc, en multipliant par k, $k^2 \geq k\,(k-1) > 0$ puis, en inversant :

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k\,(k-1)}.$$

En additionnant de 2 à n, on obtient :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\,(k-1)}.$$

En ajoutant 1 dans les deux membres, on a :

$$1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\,(k-1)}.$$

En regroupant les termes, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\,(k-1)}.$$

Par suite, $u_n \leq 1 + \sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k\,(k-1)}$.
En remarquant que $\dfrac{1}{k\,(k-1)} = \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$, on peut écrire :