Chapitre I

Le second degré

1. Pré-requis

1.1. Factoriser une expression par un réel

EXERCICE I.1.1.

a) Factoriser l'expression $2x^2 - 6x + 8$ par 2.

b) Factoriser l'expression $4x^2 - 3x + 6$ par 4.

c) Factoriser l'expression $\frac{1}{3}x^2 + \frac{5}{3}x - 4$ par $\frac{1}{3}$.

d) Factoriser l'expression $\frac{2}{3}x^2 - \frac{8}{5}x + \frac{5}{2}$ par $\frac{2}{3}$.

e) Factoriser l'expression $-2x^2 + 10x - 6$ par -2.

1.2. Écrire une racine carrée sous la forme $a\sqrt{b}$ avec a et b entiers naturels, b le plus petit possible

EXERCICE I.1.2.

a) Écrire 20 ; 18 ; 297 ; 475 ; 1260 et 735 sous la forme a^2b où a et b sont deux entiers naturels, b le plus petit possible.

b) En déduire une écriture de $\sqrt{20}$; $\sqrt{18}$; $\sqrt{297}$; $\sqrt{475}$; $\sqrt{1260}$ et $\sqrt{735}$ sous la forme $a\sqrt{b}$ avec a et b entiers naturels, b le plus petit possible.

1.3. Simplifier une fraction comportant une racine carrée au numérateur

EXERCICE I.1.3.

Simplifier les expressions suivantes $\dfrac{4+6\sqrt{5}}{2}$; $\dfrac{-14+21\sqrt{3}}{7}$; $\dfrac{20-15\sqrt{6}}{10}$; $\dfrac{-9-12\sqrt{2}}{15}$; $\dfrac{12-20\sqrt{2}}{-8}$ et $\dfrac{-3+15\sqrt{7}}{-6}$.

1.4. Dresser un tableau de signes

EXERCICE I.1.4.

Donner le tableau de signes sur $\mathbb{R}$ des fonctions f , g , h définies par :

$f(x)=3x+7$ $\quad$ $g(x)=9-2x$ $\quad$ $h(x)=x-4$

EXERCICE I.1.5.

Établir le tableau de signes des produits suivants :

a) $(2x-3)(5x+8)$

b) $(6-3x)(4x+1)$

c) $(5-x)(2x+7)(3x-5)$

d) $-6(x-7)(9-4x)$

EXERCICE I.1.6.

Établir le tableau de signes des quotients suivants :

a) $\dfrac{3x+2}{2x-6}$

b) $\dfrac{(5x-4)(3-x)}{8-3x}$

Corrections

EXERCICE I.1.1.

a) $$\begin{aligned} 2x^2-6x+8 &= 2x^2-2\times 3x+2\times 4 \\ &= 2\left(x^2-3x+4\right) \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 4x^2-3x+6 &= 4\times x^2-4\times\frac{3}{4}x+4\times\frac{6}{4} \\ &= 4\left(x^2-\frac{3}{4}x+\frac{3}{2}\right) \end{aligned}$$

c) $\frac{1}{3}x^2+\frac{5}{3}x-4 \;=\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}\times 5x-\frac{1}{3}\times 12$

$$=\frac{1}{3}\left(x^2+5x-12\right)$$

Méthodes

- Pour factoriser 4 par $\frac{1}{3}$ il suffit de diviser 4 par $\frac{1}{3}$ et puisque $4\div\frac{1}{3}=12$, on a $4=\frac{1}{3}\times 12$.

d) $\frac{2}{3}x^2-\frac{8}{5}x+\frac{5}{2} \;=\frac{2}{3}x^2-\frac{2}{3}\times\frac{12}{5}x+\frac{2}{3}\times\frac{15}{4}$

$$=\frac{2}{3}\left(x^2-\frac{12}{5}x+\frac{15}{4}\right)$$

En appliquant la méthode précédente on a :

$\frac{8}{5}\div\frac{2}{3}=\frac{8}{5}\times\frac{3}{2}=\frac{24}{10}=\frac{12}{5}$ ainsi $\frac{8}{5}=\frac{2}{3}\times\frac{12}{5}$

et $\frac{5}{2}\div\frac{2}{3}=\frac{5}{2}\times\frac{3}{2}=\frac{15}{4}$ ainsi $\frac{5}{2}=\frac{2}{3}\times\frac{15}{4}$

e) $-2x^2+10x-6=-2x^2+(-2)\times(-5x)-2\times 3=-2\left(x^2-5x+3\right)$

⚠ **Il faut être vigilent sur les signes lorsqu'on factorise par un réel négatif !**

Exercice I.1.2.

a)

> **Conseil** : il existe des critères de divisibilité qui aident à décomposer le nombre donné :
> - un nombre est divisible par 9 si la somme de ses chiffres est un multiple de 9 (par exemple 7803 car 7 + 8 + 0 + 3 = 18 qui est un multiple de 9).
> - un nombre est divisible par 4 si le nombre formé par son chiffre des dizaines et celui des unités est un multiple de 4 (par exemple 736 car 36 est un multiple de 4).
> - un nombre est divisible par 25 s'il se termine par 00, 25, 50 ou 75 (par exemple 7350 puisqu'il se termine par 50).

$20 = 4 \times 5 = 2^2 \times 5$
$18 = 9 \times 2 = 3^2 \times 2$
$297 = 9 \times 33 = 3^2 \times 33$
$475 = 25 \times 19 = 5^2 \times 19$
$1260 = 4 \times 315 = 4 \times 9 \times 35 = 2^2 \times 3^2 \times 35 = 6^2 \times 35$
$735 = 5 \times 147 = 5 \times 3 \times 49 = 7^2 \times 15$

> **Conseil** : pour ce dernier exemple, les critères précédents ne sont pas vérifiés, on procède alors par étape afin de décomposer le nombre donné. 735 se termine par 5, il est donc divisible par 5. Ensuite, $1+4+7=12$ qui est un multiple de 3 ainsi 147 est divisible par 3.

b)

> **Rappel** : pour tous réels a et b positifs on a $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.

$\sqrt{20} = \sqrt{2^2 \times 5} = \sqrt{2^2} \times \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$

$\sqrt{18} = \sqrt{3^2 \times 2} = \sqrt{3^2} \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

$\sqrt{297} = \sqrt{3^2 \times 33} = \sqrt{3^2} \times \sqrt{33} = 3\sqrt{33}$

$\sqrt{475} = \sqrt{5^2 \times 19} = \sqrt{5^2} \times \sqrt{19} = 5\sqrt{19}$

$\sqrt{1260} = \sqrt{6^2 \times 35} = \sqrt{6^2} \times \sqrt{35} = 6\sqrt{35}$

$\sqrt{735} = \sqrt{7^2 \times 15} = \sqrt{7^2} \times \sqrt{15} = 7\sqrt{15}$

Exercice I.1.3.

⚠ **Il faut factoriser l'ensemble du numérateur avant de simplifier.**

$$\frac{4+6\sqrt{5}}{2} = \frac{2\left(2+3\sqrt{5}\right)}{2} = 2+3\sqrt{5}$$

$$\frac{-14+21\sqrt{3}}{7} = \frac{7\left(-2+3\sqrt{3}\right)}{7} = -2+3\sqrt{3}$$

$$\frac{20-15\sqrt{6}}{10} = \frac{5\left(4-3\sqrt{6}\right)}{5 \times 2} = \frac{4-3\sqrt{6}}{2}$$

⚠ **On ne peut pas simplifier davantage car, même si 4 l'est, 3 n'est pas divisible par 2.**

$$\frac{-9-12\sqrt{2}}{15} = \frac{3\left(-3-4\sqrt{2}\right)}{3 \times 5} = \frac{-3-4\sqrt{2}}{5}$$

$$\frac{12-20\sqrt{2}}{-8}=\frac{-4\left(-3+5\sqrt{2}\right)}{-4\times 2}=\frac{-3+5\sqrt{2}}{2}$$

⚠ **Pensez à changer tous les signes lorsqu'on factorise par un réel négatif.**

$$\frac{-3+15\sqrt{7}}{-6}=\frac{-3\left(1-5\sqrt{7}\right)}{-3\times 2}=\frac{1-5\sqrt{7}}{2}$$

Exercice I.1.4.

Méthode

Dans cet exercice nous avons affaire à des fonctions affines. Nous allons tout d'abord calculer la valeur pour laquelle la fonction s'annule. Le signe de la fonction sera alors déterminé à partir de son coefficient directeur.

a) On résout l'équation $f(x)=0$:

$f(x)=0 \Leftrightarrow 3x+7=0 \Leftrightarrow 3x=-7 \Leftrightarrow x=-\frac{7}{3}$

La fonction s'annule donc en $-\frac{7}{3}$.

La fonction f est affine de coefficient directeur $3>0$, elle est donc croissante et par conséquent nous allons des valeurs négatives vers les valeurs positives. On obtient alors le tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\frac{7}{3}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	**0**	$+$	

b) On résout l'équation $g(x)=0$:

$g(x)=0 \Leftrightarrow 9-2x=0 \Leftrightarrow -2x=-9 \Leftrightarrow x=\frac{-9}{-2}$

$\Leftrightarrow x=\frac{9}{2}$. La fonction s'annule donc en $\frac{9}{2}$.

La fonction g est affine de coefficient directeur $-2<0$, elle est donc décroissante et par conséquent nous allons des valeurs positives vers les valeurs négatives. On obtient alors le tableau de signes :

x	$-\infty$		$\frac{9}{2}$		$+\infty$
$g(x)$		$+$	**0**	$-$	

c) On résout l'équation $h(x)=0 \Leftrightarrow x-4=0 \Leftrightarrow x=4$
La fonction s'annule donc en 4.
La fonction h est affine de coefficient directeur $1>0$, elle est donc croissante et par conséquent nous allons des valeurs négatives vers les valeurs positives. On obtient alors le tableau de signes :

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$h(x)$		$-$	**0**	$+$	

Exercice I.1.5.

Méthode

Pour dresser le tableau de signes d'un produit, on commence par chercher la valeur qui annule chaque facteur, on classe ces valeurs dans l'ordre croissant, puis on présente le signe de chaque facteur dans un même tableau. Le signe du produit s'obtient alors en appliquant la règle des signes (lorsqu'on multiplie deux nombres de même signe le résultat est positif, et lorsqu'on multiplie deux nombres de signes contraires le résultat est négatif).

a) On commence par résoudre les équations $2x-3=0$ et $5x+8=0$

$$2x-3=0 \Leftrightarrow 2x=3 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$$

$$5x+8=0 \Leftrightarrow 5x=-8 \Leftrightarrow x=-\frac{8}{5}$$

On a $-\frac{8}{5}<\frac{3}{2}$ d'où le tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\frac{8}{5}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$2x-3$		$-$	⋮	$-$	**0**	$+$	
$5x+8$		$-$	**0**	$+$	⋮	$+$	
produit		$+$	**0**	$-$	**0**	$+$	

b) On commence par résoudre les équations $6-3x=0$ et $4x+1=0$

$$6-3x=0 \Leftrightarrow -3x=-6 \Leftrightarrow x=\frac{-6}{-3} \Leftrightarrow x=\frac{6}{3} \Leftrightarrow x=2$$

$4x+1=0 \Leftrightarrow 4x=-1 \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{4}$

On a $-\dfrac{1}{4}<2$ d'où le tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		2		$+\infty$
$6-3x$		$+$	⋮	$+$	**0**	$-$	
$4x+1$		$-$	**0**	$+$	⋮	$+$	
produit		$-$	**0**	$+$	**0**	$-$	

c) On commence par résoudre les équations $5-x=0$, $2x+7=0$ et $3x-5=0$

$5-x=0 \Leftrightarrow -x=-5 \Leftrightarrow x=5$

$2x+7=0 \Leftrightarrow 2x=-7 \Leftrightarrow x=-\dfrac{7}{2}$

$3x-5=0 \Leftrightarrow 3x=5 \Leftrightarrow x=\dfrac{5}{3}$

On a $-\dfrac{7}{2}<\dfrac{5}{3}<5$ d'où le tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\frac{7}{2}$		$\frac{5}{3}$		5		$+\infty$
$5-x$		$+$	⋮	$+$	⋮	$+$	**0**	$-$	
$2x+7$		$-$	**0**	$+$	⋮	$+$	⋮	$+$	
$3x-5$		$-$	⋮	$-$	**0**	$+$	⋮	$+$	
produit		$+$	**0**	$-$	**0**	$+$	**0**	$-$	

d) On commence par résoudre les équations $x-7=0$ et $9-4x=0$

$x-7=0 \Leftrightarrow x=7$

$9-4x=0 \Leftrightarrow -4x=-9 \Leftrightarrow x=\dfrac{-9}{-4} \Leftrightarrow x=\dfrac{9}{4}$

On a $\dfrac{9}{4}<7$ d'où le tableau de signes :

x	$-\infty$		$\frac{9}{4}$		7		$+\infty$
-6		$-$	⋮	$-$	⋮	$-$	
$x-7$		$-$	⋮	$-$	**0**	$+$	
$9-4x$		$+$	**0**	$-$	⋮	$-$	
produit		$+$	**0**	$-$	**0**	$+$	

Exercice I.1.6.

Méthode

Pour dresser le tableau de signes d'un quotient, on commence par chercher la ou les valeurs interdites (celles qui annulent le dénominateur) et la ou les valeurs qui annulent le numérateur. On classe ces valeurs dans l'ordre croissant, puis on présente le signe de chaque facteur dans un même tableau. Le signe du quotient s'obtient alors en appliquant la règle des signes. Les valeurs interdites sont symbolisées par une double barre dans le tableau.

a) Valeur interdite : on résout l'équation $2x-6=0$

$2x-6=0 \Leftrightarrow 2x=6 \Leftrightarrow x=\frac{6}{2} \Leftrightarrow x=3$

Valeur qui annule le numérateur : on résout l'équation $3x+2=0$

$3x+2=0 \Leftrightarrow 3x=-2 \Leftrightarrow x=-\frac{2}{3}$

On a $-\frac{2}{3}<3$ d'où le tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		3		$+\infty$
$3x+2$		$-$	0	$+$	‖	$+$	
$2x-6$		$-$	$\vdots$	$-$	‖	$+$	
quotient		$+$	0	$-$	‖	$+$	

b) Valeur interdite : on résout l'équation $8-3x=0$

$8-3x=0 \Leftrightarrow -3x=-8 \Leftrightarrow x=\frac{-8}{-3} \Leftrightarrow x=\frac{8}{3}$

Valeurs qui annulent le numérateur : on résout les équations $5x-4=0$ et $3-x=0$

$5x-4=0 \Leftrightarrow 5x=4 \Leftrightarrow x=\frac{4}{5}$

et $3-x=0 \Leftrightarrow -x=-3 \Leftrightarrow x=3$

On a $\frac{4}{5}<\frac{8}{3}<3$ d'où le tableau de signes :