

Problème n° 1

Nombres complexes

Notions utilisées :

Module et arguments d'un nombre complexe.

Somme et produit de nombres complexes.

Niveau : **

Temps prévu : 2 heures.

A Énoncé

\mathbb{Z} désigne l'ensemble des entiers relatifs et \mathbb{C} l'ensemble des nombres complexes.

On note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

Partie I

1°) Préciser la partie réelle et la partie imaginaire de j .

2°) Calculer $1 + j + j^2$.

3°) Montrer que tout nombre complexe z peut s'écrire, de façon unique, sous la forme $z = x + yj$ où x et y sont deux réels.

Partie II

On considère l'ensemble $E = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } z = a + bj \text{ où } (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$.

1°) a) Montrer que la somme de deux éléments de E est un élément de E .

b) Montrer que le produit de deux éléments de E est un élément de E .

2°) Soit n un entier naturel. Déterminer, après avoir justifié leur existence, les entiers relatifs a_n et b_n tels que $(1 + j)^n = a_n + b_n j$.

(On pourra considérer les trois cas $n = 3p$, $n = 3p + 1$ et $n = 3p + 2$ où $p \in \mathbb{N}$).

3°) Déterminer deux éléments z_1 et z_2 de E vérifiant
$$\begin{cases} z_1 + z_2 = 3 \\ z_1 z_2 = 3 \end{cases}$$

Partie III

On considère l'ensemble $I = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } z = (1-j)(a+bj) \text{ où } (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$.

1°) Montrer que I est inclus dans E .

2°) Montrer que la somme de deux éléments de I est un élément de I .

Montrer que le produit de deux éléments de I est un élément de I .

- 3°) Déterminer les éléments de I qui appartiennent à \mathbb{Z} .
- 4°) Soit $z = a + bj$ ($a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$) un élément de E . Montrer que $z - (a + b)$ est élément de I .
- 5°) Montrer que quel que soit z élément de E un et un seul des trois nombres z , $z - 1$ ou $z + 1$ est élément de I .
- (Indication : en posant $z = a + bj$ où $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$ on pourra remarquer qu'un seul élément de l'ensemble $\{a + b - 1, a + b, a + b + 1\}$ appartient à I).

B Analyse du sujet

Ce problème est consacré à l'étude de deux sous-ensembles particuliers de l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes.

Bien que n'utilisant que des connaissances du programme de terminale S, on notera que son esprit est très différent de celui que l'on rencontre dans les exercices du baccalauréat portant sur les nombres complexes.

Les trois parties qui le composent ne sont pas totalement indépendantes et il conviendra lors de l'analyse de bien repérer les questions qui seront réutilisées (et pour lesquelles toute erreur serait fatale) et celles dont on peut admettre le résultat.

Partie I Quelques propriétés du nombre complexe j

1°) Question sans aucune difficulté.

Il suffit d'utiliser l'écriture exponentielle d'un nombre complexe de module 1 :

$e^{i\vartheta} = \cos \vartheta + i \sin \vartheta$. Cette question jouant un rôle important dans la suite, il est fortement conseillé, si l'on a le moindre doute, de vérifier les lignes trigonométriques de $\frac{2\pi}{3}$ à l'aide d'un cercle trigonométrique. Enfin, on ne se contentera pas de fournir la forme trigonométrique ou la forme algébrique de j . On précisera bien les parties réelles et imaginaires.

2°) Le candidat, qui a déjà rencontré j comme racine cubique de l'unité en Terminale, sait que cette somme est nulle. Ce résultat peut être établi de trois manières (au moins) :

- soit on reprend la forme algébrique de j et obtient la somme recherchée en calculant j^2 avec la formule $(a + ib)^2$ (un peu lourd... mais facile !);

- soit, en utilisant $j^2 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}$ et les lignes trigonométriques de $\frac{4\pi}{3}$, on détermine la forme algébrique de j^2 . On calcule ensuite la somme demandée en travaillant sur les formes algébriques ;

- ou, encore plus élégant, on joue sur le fait que $(1 + j + j^2)(1 - j) = 1 - j^3$ et comme $j^3 = 1$, on conclut facilement.

Cette question joue un rôle très important dans la suite donc si en calculant $1 + j + j^2$ on ne trouve rien de remarquable, mieux vaut se relire...

3°) Question plus délicate... Bien voir qu'il y a deux points à étudier : l'**existence** puis l'**unicité** de l'écriture $x + yj$. On fera le lien avec le fait que tout nombre complexe peut s'écrire de manière unique sous la forme $a + bi$ où a et b sont réels, et on réutilisera l'écriture algébrique de j obtenue à la première question.

La méthode pour prouver l'unicité de l'écriture obtenue est classique : on rai-

sonne par l'absurde en supposant que z admet deux écritures distinctes du type $x + yj$ ce qui conduit à une contradiction.

Partie II Étude d'un sous-ensemble de \mathbb{C}

1°) a) On démontre, dans cette question, que l'addition est une opération interne dans E , calcul qui ne pose aucune difficulté mais qui demande une rédaction rigoureuse.

b) Il s'agit maintenant de prouver que la multiplication est une opération interne dans E . Pas de difficulté sur la méthode à employer mais on utilise la réponse de la question I-2.

Les résultats de ces deux questions seront réutilisés plus loin mais ils peuvent éventuellement être admis.

2°) La question comporte deux parties :

i) Il faut justifier le fait que $(1 + j)^n$ peut s'écrire sous la forme $\alpha + \beta j$. On voit clairement que ceci résulte directement du fait que E est stable par multiplication.

ii) Il faut préciser cette écriture. Pour cela, on suivra les indications du texte en considérant les trois cas proposés. On peut auparavant calculer au brouillon les premières puissances de $1 + j$ pour comprendre pourquoi on sépare en trois cas.

3°) Bien voir qu'on doit résoudre ce système dans E^2 et pas seulement dans \mathbb{C}^2 . On commence par le résoudre dans \mathbb{C}^2 ce qui ne pose aucune difficulté puis on exprime des deux solutions sous la forme $a + bj$ où a et b sont deux entiers relatifs. On sera amené pour cela à utiliser l'écriture algébrique de j (résultat de la question I-1).

On peut se demander pourquoi le concepteur du sujet a choisi de faire résoudre un tel système. La réponse viendra plus loin lors de l'étude de l'ensemble I .

Partie III Étude d'un sous-ensemble de E

1°) La méthode pour démontrer une inclusion est supposée connue : on montre que tout élément de I est élément de E .

On évitera au maximum les calculs et on préférera les solutions réexploitant des résultats antérieurs. On remarque que $1 - j$ et $a + bj$ sont deux éléments de E . Il suffit alors d'utiliser le résultat de la question II-1-b.

2°) Là aussi, pas de calculs inutiles. Si on a bien identifié un élément de I comme étant le produit de $1 - j$ par un élément de E , les deux résultats se déduisent très rapidement de la partie II.

Ce sujet permet au correcteur de bien voir si le candidat a perçu le fil directeur du problème ou pas. On peut en effet traiter un certain nombre de questions de manière très calculatoire, sans faire le lien avec le reste du problème. Outre

la pénalisation créée par la lourdeur des calculs et le temps nécessaire pour les effectuer, le candidat risque de ne pas voir sa copie valorisée lors de la correction. Tous les rapports de jury recommandent au candidat de prendre le temps nécessaire pour « s'imprégner du sujet ». Dans le cadre d'un sujet comme celui-ci, cette recommandation est capitale.

3°) Plus délicat... On pense aux méthodes rencontrées en terminale pour savoir si un nombre complexe appartient à \mathbb{R} . Il faut revenir à l'écriture algébrique d'un élément de I pour avoir des informations sur sa partie imaginaire (et on utilise la question I-1...). Cette question donne un éclairage sur la question II-3.

4°) C'est une question très simple, auxiliaire permettant de résoudre la question 5. Mais on n'oublie pas qu'en concours, on doit traiter toutes les « questions cadeaux », une admissibilité pouvant se jouer à un demi-point près !

5°) La question difficile du problème ! Elle demande d'avoir bien perçu tous les enchaînements d'idées et l'indication fournie ne pourra être exploitée que si la question III-3 est traitée correctement.

Cette question demande un temps de réflexion assez important. Elle ne sera donc traitée en concours que si tout le reste du problème (qui est beaucoup plus abordable) a été résolu. En revanche, si ce problème est traité dans un objectif de formation, sans contrainte de temps, il est important de la chercher longuement sans se précipiter sur la correction.

C Tableau récapitulatif

I-1	Question indépendante	Application directe du cours de Terminale S	La réponse à cette question joue un rôle essentiel dans la suite du problème
I-2	Question qui peut être indépendante	Trois méthodes possibles	Joue un rôle clé pour la suite
I-3	Dépend de la question I-1	Réflexion nécessaire	Bien voir qu'il y a un problème d'existence et d'unicité. Peut être admis
II-1-a	Question indépendante	Aucune difficulté	Veiller à la précision de la rédaction
II-1-b	Utilise le résultat de la question I-2	Sans difficulté si la question I-2 est bonne	Résultat réutilisé ensuite mais pouvant être admis
II-2	Utilise les résultats de I-2 et de II-1-b	Réflexion nécessaire	La question comporte deux parties ; le mettre en évidence dans la rédaction
II-3	Utilise les résultats de I-2 et de I-3	Sans difficulté	Penser après la résolution dans \mathbb{C}^2 à revenir dans E^2
III-1	Utilise le résultat de la question II-1	Sans difficulté	Éviter à tout prix une solution calculatoire
III-2	On exploite le résultat de la question II-1	Sans difficulté	Bien mettre en évidence les liens entre les questions
III-3	Dépend de la question I-1	Réflexion nécessaire	
III-4	Question indépendante	Aucune difficulté	Sera utilisée dans la question III-5 mais peut être admise
III-5	Dépend des questions III-2.3.4	Question très délicate	Ne peut être réussie que si on a trouvé la question III-3

D Solution

\mathbb{Z} désigne l'ensemble des entiers relatifs et \mathbb{C} l'ensemble des nombres complexes.

On note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

Partie I

1°) Préciser la partie réelle et la partie imaginaire de j .

$$\Re(j) = \cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}, \quad \Im(j) = \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2°) Calcul de $1 + j + j^2$.

$$\text{On note que } j \neq 1. \quad 1 + j + j^2 = \frac{1 - j^3}{1 - j}.$$

Or, en utilisant la formule de Moivre, $j^3 = e^{2i\pi} = 1$.

$$\text{Ainsi } 1 + j + j^2 = 0.$$

En procédant ainsi, on évite les calculs et on ne répercute pas une éventuelle erreur à la question 1. On n'oubliera pas de préciser $j \neq 1$.

3°) Montrer que tout nombre complexe z peut s'écrire, de façon unique, sous la forme $z = x + yj$ où x et y sont deux réels.

i) Soit z un nombre complexe. Il existe deux réels α et β tels que $z = \alpha + \beta i$.

Sachant que $i = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3}j$ on déduit que $z = \alpha + \frac{\sqrt{3}}{3}\beta + \frac{2\sqrt{3}}{3}\beta j$ où $\alpha + \frac{\sqrt{3}}{3}\beta$ et $\frac{2\sqrt{3}}{3}\beta$ sont deux réels.

Ainsi il existe deux réels x et y tels que $z = x + yj$.

ii) Montrons que cette écriture est unique.

Supposons, par l'absurde, qu'il existe deux couples distincts de réels (x, y) et (x', y') tels que $z = x + yj = x' + y'j$.

$$\text{Alors } x - \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2}yi = x' - \frac{1}{2}y' + \frac{\sqrt{3}}{2}y'i.$$

Or on sait que deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.

On en déduit que $\begin{cases} x - \frac{1}{2}y = x' - \frac{1}{2}y' \\ y = y' \end{cases}$ donc $x = x'$ et $y = y'$ ce qui contredit

l'hypothèse faite sur les couples (x, y) et (x', y') supposés distincts.

De i) et ii) on déduit que tout nombre complexe z peut s'écrire, de façon unique, sous la forme $z = x + yj$ où x et y sont deux nombres réels.

Partie II

On considère l'ensemble $E = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } z = a + bj \text{ où } a \in \mathbb{Z} \text{ et } b \in \mathbb{Z}\}$.

1°) a) Montrer que la somme de deux éléments de E est un élément de E .

Soient z_1 et z_2 deux éléments de E . Il existe a, b, c et d entiers relatifs tels que $z_1 = a + bj$ et $z_2 = c + dj$.

Ainsi $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)j$ où $a + c \in \mathbb{Z}$ et $b + d \in \mathbb{Z}$ car la somme de deux entiers relatifs est un entier relatif.

On en déduit que la somme de deux éléments de E est un élément de E . On dit que E est stable pour l'addition.

b) Montrer que le produit de deux éléments de E est un élément de E .

Soient z_1 et z_2 deux éléments de E . Il existe a, b, c et d entiers relatifs tels que $z_1 = a + bj$ et $z_2 = c + dj$.

Ainsi $z_1 z_2 = ac + (ad + bc)j + bdj^2$. Or $j^2 = -1 - j$ donc

$z_1 z_2 = (ac - bd) + (ad + bc - bd)j$ où $ac - bd \in \mathbb{Z}$ et $ad + bc - bd \in \mathbb{Z}$ car la somme et le produit d'entiers relatifs est un entier relatif.

On en déduit que le produit de deux éléments de E est un élément de E . On dit que E est stable pour la multiplication.

2°) Soit n un entier naturel. Déterminer, après avoir justifié leur existence, les entiers relatifs a_n et b_n tels que $(1 + j)^n = a_n + b_n j$.

$1 + j$ est élément de E et le produit d'éléments de E est élément de E . On en déduit, par une récurrence immédiate, que pour tout n entier naturel, $(1 + j)^n$ est élément de E (pour $n = 0$, on vérifie que $1 \in E$ car $1 = 1 + 0 \cdot j$). Ainsi il existe deux entiers relatifs a_n et b_n tels que $(1 + j)^n = a_n + b_n j$.

Rappelons que $1 + j = -j^2$.

• 1^{er} cas $k = 3p$ où $p \in \mathbb{Z}$.

$$(1 + j)^{3p} = (-j^2)^{3p} = (-1)^p \quad (\text{on rappelle que } (j^2)^{3p} = 1).$$

$$(1 + j)^{3p} = (-1)^p + 0j \text{ où } (-1)^p \in \mathbb{Z} \text{ donc } a_{3p} = (-1)^p \text{ et } b_{3p} = 0.$$

• 2^e cas $k = 3p + 1$ où $p \in \mathbb{Z}$.

$$(1 + j)^{3p+1} = (1 + j)(-j^2)^{3p} = (1 + j)(-1)^p.$$

$$\text{Ainsi, } (1 + j)^{3p+1} = (-1)^p + (-1)^p j \text{ donc } a_{3p+1} = b_{3p+1} = (-1)^p.$$

• 3^e cas $k = 3p + 2$ où $p \in \mathbb{Z}$.

$$(1 + j)^{3p+2} = (1 + j)^2 (-j^2)^{3p} = (-j^2)^2 (-1)^p = j(-1)^p.$$

$$\text{Ainsi, } a_{3p+2} = 0 \text{ et } b_{3p+2} = (-1)^p.$$