Chapitre I Algèbre et combinatoire

I Ensembles, applications

1 $\mathbf{S_1} - \mathbf{E_1}$

a) Donner un exemple d'application injective d'un ensemble fini dans un ensemble infini.

b) Donner un exemple d'application surjective d'un ensemble infini sur un ensemble fini.

c) Donner un exemple d'application surjective non bijective d'un ensemble infini sur un ensemble infini.

⋆

2 $\mathbf{S_1} - \mathbf{E_1}$

Que pensez-vous de l'affirmation suivante ?
Si E est un ensemble fini et s une permutation de E, alors, pour tout élément x de E, $s(x) \neq x$.

⋆

3 $\mathbf{S_1} - \mathbf{E_1}$

Soient E un ensemble et f une application de E dans E telle que $f \circ f = f$.

a) Montrer que si f est injective alors $f = id_E$.

b) Montrer que si f est surjective alors $f = id_E$.

⋆

4 $\mathbf{S_1} - \mathbf{E_1}$

Soient E un ensemble et f une application de E dans E telle que $f \circ f \circ f = f$.
Montrer que f est injective si, et seulement si, f est surjective.

⋆

5 $\mathbf{S_1}$ – $\mathbf{E_1}$

Soit f une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.
Montrer que, pour tout n entier naturel, $f(n) \geqslant n$. Que peut-on en déduire ?

$\star$

6 $\mathbf{S_1}$

A et B étant deux parties d'un ensemble E, on rappelle que $A \backslash B = A \cap \overline{B}$.
Peut-on dire que $\mathbb{1}_{A \backslash B} = \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B$?

$\star$

7 $\mathbf{S_1}$

Soient A et B deux parties d'un ensemble E.
Montrer que $A \subset B$ si, et seulement si, $\forall x \in E$, $\mathbb{1}_A(x) \leqslant \mathbb{1}_B(x)$.

$\star$

8 $\mathbf{S_1}$ – $\mathbf{E_1}$

Soient E et F deux ensembles non vides et f une application de E dans F.
Pour tout sous-ensemble A de E, a-t-on $f^{-1}[f(A)] = A$?

$\star$

9 $\mathbf{S_1}$ – $\mathbf{E_1}$

Rappeler la définition d'un ensemble dénombrable. Donner trois exemples d'ensembles dénombrables.
L'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ des parties de $\mathbb{N}$ est-il dénombrable ?

$\star$

10 $\mathbf{S_1}$ – $\mathbf{E_1}$

Soient E, F et G trois ensembles non vides. Soient f une application de E dans F et g une application de F dans G.

a) Montrer que si f et g sont injectives alors $g \circ f$ est injective .
b) La réciproque de la proposition précédente est-elle vraie ?

$\star$

11 $\mathbf{S_1} - \mathbf{E_1}$

Soient E, F et G trois ensembles non vides. Soient f une application de E dans F et g une application de F dans G.

a) Montrer que si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective .

b) La réciproque de la proposition précédente est-elle vraie ?

⋆

12 $\mathbf{S_1} - \mathbf{E_1}$

Soient E, F et G trois ensembles non vides. Soient f une application de E dans F et g une application de F dans G.

a) Si $g \circ f$ est injective et f surjective, que peut-on en déduire pour g ?

b) Si $g \circ f$ est surjective et g injective, que peut-on en déduire pour f ?

⋆

$\boxed{\text{II}}$ Combinatoire

13 $\mathbf{S_1} - \mathbf{E_1}$

Soit E un ensemble de cardinal n (n entier naturel non nul).
Donner le cardinal de l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E et proposer trois méthodes de démonstration de ce résultat.

⋆

14 $\mathbf{S_1} - \mathbf{E_1}$

Soit E un ensemble de cardinal n (n entier naturel non nul).

a) Déterminer le nombre de couples (A, B) de parties de E telles que $A \cap B = \emptyset$.

b) Déterminer le nombre de couples (A, B) de parties de E telles que $B \subset A$.

⋆

15 $\mathbf{S_1} - \mathbf{E_1}$

Soit n un entier naturel non nul. Calculer $1 + \frac{1}{2}\binom{n}{1} + ... + \frac{1}{n+1}\binom{n}{n}$.

⋆

16 $\mathbf{S_1} - \mathbf{E_1}$

Soit p un entier naturel. On pose $S_p = \sum_{k=1}^{n} k^p$.

a) Rappeler les valeurs de S_0, S_1, S_2, S_3 et proposer au moins deux méthodes de démonstration pour le calcul de ces trois dernières sommes.

b) Soit p fixé ($p \geqslant 1$), établir une formule permettant de calculer S_p en fonction de $S_0, S_1, \ldots, S_{p-1}$.

$\star$

17 $\mathbf{S_1} - \mathbf{E_1}$

Soit n un entier naturel non nul et E un ensemble contenant n éléments. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. Calculer $S = \sum_{X \in \mathcal{P}(E)} \text{Card}\,(X)$.

$\star$

III Nombres complexes

18 $\mathbf{S_1}$

La proposition suivante est-elle vraie ?

$$\forall (a,b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \text{ tels que } a+b \neq 0, \qquad \frac{1}{a+b} \neq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

$\star$

19 $\mathbf{S_1}$

Soit α un réel. On considère $z = 1 + \cos\alpha + i \sin\alpha$.
Peut-on dire que le module de z est strictement supérieur à 1 ?

$\star$

20 $\mathbf{S_1}$

Étant donné un réel a, déterminer les racines quatrièmes du nombre complexe z défini par :

$$z = 8a^2 - (1+a^2)^2 + 4a(1-a^2)i$$

$\star$

21 $\mathbf{S_1}$

a) Soit a un réel strictement positif. Montrer qu'il n'existe pas de réel c tel que $\mathrm{e}^{ia} - 1 = ia\mathrm{e}^{ic}$.

b) En déduire que si a et b sont deux réels tels que $b < a$ alors il n'existe pas de réel c tel que $\mathrm{e}^{ia} - \mathrm{e}^{ib} = i(a-b)\mathrm{e}^{ic}$.

⋆

22 $\mathbf{S_1}$

Résoudre, dans $\mathbb{R}^2$: $\left\{ \begin{array}{rcl} x^6 - 15x^4y^2 + 15x^2y^4 - y^6 & = & 1 \\ 3x^5y - 10x^3y^3 + 3xy^5 & = & 0 \end{array} \right.$

⋆

23 $\mathbf{S_1}$

Soit n un entier naturel. Montrer que $\left| \sum_{k=0}^{n} \cos 2k \right| \leqslant 2$.

⋆

24 $\mathbf{S_1}$

Déterminer les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E) :

$$z^4 - z^3 + z^2 - z - 1 = 0.$$

⋆

25 $\mathbf{S_1}$

Soient n un entier naturel tel que $n \geqslant 2$ et ω une racine n-ième de l'unité différente de 1. Calculer la somme $S = \sum_{k=1}^{n} k\omega^{k-1}$.

⋆

IV Polynômes

26 $\mathbf{S_1}$ – $\mathbf{E_1}$

Que pensez-vous de l'affirmation suivante ?
Le polynôme X^8+X^4+1 n'admet pas de racines réelles donc il est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.

$\star$

27 $\mathbf{S_1}$ – $\mathbf{E_1}$

Que pensez-vous de l'affirmation suivante ?
La somme des coefficients d'un polynôme est nulle si, et seulement si, ce polynôme est divisible par $X-1$.

$\star$

28 $\mathbf{S_1}$

Soit n un entier naturel non nul. Que pensez-vous de l'affirmation suivante ?
Le polynôme $P=\displaystyle\sum_{k=0}^{n} X^k$ n'admet pas de racine réelle.

$\star$

29 $\mathbf{S_1}$

Trouver tous les polynômes de P de $\mathbb{K}[X]$ vérifiant $P(2)=1$, $P'(2)=2$, $P''(2)=4$ et pour tout $n\geqslant 3$, $P^{(n)}(2)=0$.

$\star$

30 $\mathbf{S_1}$ – $\mathbf{E_2}$

Montrer que le polynôme $(X-1)^{1\,006}+X^{2\,009}$ est divisible par X^2-X+1.

$\star$

31 $\mathbf{S_1}$

Soit n un entier naturel tel que $n\geqslant 2$. Calculer le produit $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\left(1-\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)$.

$\star$

32 $\mathbf{S_1} - \mathbf{E_2}$

Les racines du polynôme $2X^3 + X + 1$ sont-elles simples ?

⋆

33 $\mathbf{S_1} - \mathbf{E_1}$

Pour tout n entier naturel non nul, on considère dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme

$$P_n = 1 + X + \frac{1}{2!}X(X+1) + \cdots + \frac{1}{n!}X(X+1)\ldots(X+n-1).$$

Montrer que P_n n'a que des racines simples.

⋆

34 $\mathbf{S_1} - \mathbf{E_2}$

Soit n un entier naturel. On note $P = X^{n+1} - \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} X^k$.

a) Montrer que 1 est racine de P. Quel est son ordre de multiplicité ?

b) Développer $(X-1)P$. P admet-il des racines multiples ?

⋆

35 $\mathbf{S_1}$

Soit n un entier naturel non nul. Déterminer l'ensemble des polynômes P vérifiant $P - P' = \dfrac{1}{n!}X^n$.

⋆

36 $\mathbf{S_1}$

On note E l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ tels que

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2 \quad P(zz') = P(z)P(z').$$

a) Déterminer les polynômes constants éléments de E.

b) Déterminer le(s) polynôme(s) du premier degré élément(s) de E.

c) Déterminer tous les éléments de E.

⋆

37 $\mathbf{S_1}$

Soit n un entier naturel non nul.

a) Montrer qu'il existe un couple de polynômes (P, Q) tel que $d^\circ P \leqslant n$, $d^\circ Q \leqslant n$ et pour tout x réel $(1-x)^n P(x) + x^n Q(x) = 1$
(On pourra considérer le polynôme $(1 - X + X)^{2n}$).

b) Montrer que, pour tout x réel, $Q(x) = P(1-x)$.

⋆

38 $\mathbf{S_1} - \mathbf{E_1}$

Soient P et Q deux polynômes tels que $PQ = \vartheta$ où ϑ désigne le polynôme nul. Que peut-on en déduire ?
Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $fg = \theta$ où θ désigne la fonction nulle. Que peut-on en déduire ?

⋆