Chapitre 1

Introduction

1.1 Théorie

L'aire d'un rectangle R de côtés a et b est ab, par définition. Lorsque a et b sont des entiers, cette aire est égale au nombre de carrés de côté unité nécessaires pour recouvrir R. L'aire du triangle rectangle de base a et de hauteur b est bien évidemment $ab/2$. On en déduit l'aire d'un triangle quelconque puis, par triangulation, celle d'un polygone arbitraire.

Le calcul de l'aire d'un domaine D délimité par des courbes plus complexes, par exemple des arcs de cercle ou des segments de parabole, nécessite un passage à la limite. Dans le cas où D est déterminé par le graphe d'une fonction f continue et positive sur un intervalle compact $[a, b]$ [1],

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b \ , \ 0 \leq y \leq f(x)\},$$

considérons avec Riemann une partition $\mathcal{P}$ de l'intervalle $[a, b]$:

$$\mathcal{P} = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\} \quad \text{où} \quad a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b.$$

Alors la somme supérieure

$$S(f, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} \sup\{f(x) \mid x_{k-1} \leq x \leq x_k\}(x_k - x_{k-1})$$

fournit une borne supérieure pour l'aire requise et la somme inférieure

$$s(f, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} \inf\{f(x) \mid x_{k-1} \leq x \leq x_k\}(x_k - x_{k-1})$$

1. $[a, b]$ désigne un intervalle contenant ses extrémités, $]a, b[$ désigne un intervalle ne contenant pas ses extrémités et (a, b) désigne un intervalle contenant peut-être ses extrémités.

en fournit une borne inférieure. En utilisant les propriétés des fonctions continues sur les intervalles compacts, on montre que

$$\inf\{S(f,\mathcal{P}) \mid \mathcal{P}\} = \sup\{s(f,\mathcal{P}) \mid \mathcal{P}\}$$

et c'est cette valeur commune que l'on prend pour mesure de l'aire du domaine D. On exprime ceci en disant que la fonction f est intégrable au sens de Riemann sur l'intervalle $[a,b]$, d'intégrale

$$\int_a^b f(x)\ dx = \inf\{S(f,\mathcal{P}) \mid \mathcal{P}\} = \sup\{s(f,\mathcal{P}) \mid \mathcal{P}\}.$$

Lorsque la fonction f n'est pas continue, il n'est plus certain qu'elle soit intégrable au sens de Riemann, même si elle est positive et bornée. Un exemple d'une telle fonction est fourni par la fonction indicatrice des nombres rationnels $f = \mathbb{I}_{\mathbb{Q}}$, introduite par Dirichlet et définie par

$$\mathbb{I}_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

qui n'est intégrable sur aucun intervalle $[a,b]$ puisque l'on a toujours

$$S(\mathbb{I}_{\mathbb{Q}},\mathcal{P}) = b-a\ ,\ \ s(\mathbb{I}_{\mathbb{Q}},\mathcal{P}) = 0.$$

On peut essayer d'élargir la classe des fonctions intégrables, et ceci est l'objet de notre cours, en considérant avec Lebesgue des partitions de l'axe des ordonnées plutôt que des partitions de l'axe des abscisses. Nous étendrons d'abord la notion de longueur d'un intervalle,

$$\lambda([a,b]) = b-a,$$

à une classe plus vaste d'ensembles (nous les nommerons : **ensembles mesurables** et la longueur généralisée : **mesure**). Nous considérerons alors la somme

$$\sigma_m(f) = \sum_{k=0}^{m} \frac{k}{m}\ \lambda(E_k)$$

où

$$E_k = \left\{x \mid \frac{k}{m} \leq f(x) < \frac{k+1}{m}\right\}$$

et $\lambda(E_k)$ est la mesure de E_k. (Pour alléger l'exposé, nous avons supposé ici que $0 \leq f(x) \leq 1$.) Cette somme d'aires de rectangles généralisés constitue une bonne approximation de l'aire du domaine D cherchée : lorsque m est grand en effet, f est presque constante sur E_k. La complexité de la fonction se traduit par la complexité des ensembles E_k. Si f est monotone par exemple, les ensembles E_k sont des intervalles et la somme $\sigma_m(f)$ se réduit à la somme $s(f, \mathcal{P})$ correspondante. Pour une classe très vaste de fonctions (nous les appellerons : **fonctions mesurables**), nous verrons que

$$\lim_{m \to +\infty} \sigma_m(f)$$

existe et généralise effectivement la notion d'aire précédemment obtenue. Une telle fonction sera dite intégrable au sens de Lebesgue, d'intégrale

$$\int_0^1 f = \lim_{m \to +\infty} \sigma_m(f).$$

La propriété de la mesure qui permettra ces développements est la **propriété d'additivité** : désignant par $\sum_n E_n$ la réunion d'une suite finie ou infinie d'ensembles mesurables deux à deux disjoints[2], nous aurons

$$\lambda\left(\sum_n E_n\right) = \sum_n \lambda(E_n)$$

et c'est sur cette propriété fondamentale que reposera toute la théorie.

1.2 Exercices

1. Vérifier que la fonction
$$x \mapsto \mathbb{I}_{\mathbb{Q}}(x)$$
est partout discontinue.

2. Déterminer l'ensemble des points de continuité de la fonction
$$x \mapsto x\,\mathbb{I}_{\mathbb{Q}}(x).$$

3. Déterminer les ensembles E_k associés à la fonction $\mathbb{I}_{\mathbb{Q}}$.

4. Montrer que
$$\mathbb{I}_{\mathbb{Q}}(x) = \lim_{m \to +\infty}\left(\lim_{n \to +\infty} (\cos m!\pi x)^n\right).$$

2. et par $E_1 + E_2$ la réunion de deux ensembles disjoints.

5. Calculer
$$\int_0^1 (\cos m!\pi x)^n \; dx$$
puis
$$\lim_{m\to+\infty}\left(\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 (\cos m!\pi x)^n \; dx\right).$$

Chapitre 2

Parties mesurables de $\mathbb{R}$

Dans ce chapitre, nous allons généraliser la notion de longueur en deux étapes. Nous associerons d'abord à tout ensemble $E \subseteq \mathbb{R}$ un élément $\lambda^*(E)$ de $[0, +\infty]$ [1] appelé mesure extérieure de E qui, lorsque E est un intervalle, se réduit à sa longueur. Nous restreindrons ensuite la fonction $E \mapsto \lambda^*(E)$ ainsi définie sur l'ensemble $\mathfrak{P}(\mathbb{R})$ de toutes les parties de $\mathbb{R}$ à une famille $\mathfrak{L}_\mathbb{R}$ appropriée d'ensembles de façon à avoir la propriété d'additivité. Ces ensembles seront les ensembles mesurables et la fonction restreinte sera la mesure. Nous verrons ensuite des exemples d'ensembles mesurables et étudierons des propriétés supplémentaires de la mesure.

2.1 Mesure extérieure

La **mesure extérieure** $\lambda^*(E)$ d'un ensemble $E \subseteq \mathbb{R}$ est définie par l'équation

$$\lambda^*(E) = \inf \left\{ \sum_k (b_k - a_k) \mid E \subseteq \bigcup_k \,]a_k, b_k[\right\},$$

la borne inférieure étant calculée sur la famille des suites finies ou infinies d'intervalles ouverts $\{\ ]a_k, b_k[\ \}_k$ recouvrant E. Pour étudier ses propriétés, nous nous appuierons sur le théorème suivant.

Théorème 1 (Borel-Lebesgue) *Tout recouvrement d'un intervalle compact $[a, b]$ par des intervalles ouverts $\{\ ]a_\alpha, b_\alpha[\ \}_{\alpha \in A}$ contient un sous-recouvrement fini.*

1. On convient que si $a \in [0, +\infty]$, $a + (+\infty) = +\infty$, que si $a \in]0, +\infty]$, $a \times (+\infty) = +\infty$ et enfin que $0 \times (+\infty) = 0$.

Démonstration.

Supposons le contraire. Alors au moins l'un des deux intervalles

$$[a, \frac{a+b}{2}] \ , \ [\frac{a+b}{2}, b]$$

ne pourrait être recouvert par un nombre fini des intervalles $]a_\alpha, b_\alpha[$. Donc au moins l'un des quatre intervalles

$$[a, \frac{3a+b}{4}] \ , \ [\frac{3a+b}{4}, \frac{a+b}{2}] \ , \ [\frac{a+b}{2}, \frac{a+3b}{4}] \ , \ [\frac{a+3b}{4}, b]$$

ne pourrait l'être. Ainsi de suite. On obtiendrait de cette façon une suite d'intervalles emboîtés,

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \cdots ,$$

dont le $n^{\text{ième}}$ aurait pour longueur $(b-a)/2^n$. L'intersection de tous ces intervalles se réduirait à un point x de $[a, b]$. Il existerait donc un intervalle $]a_\alpha, b_\alpha[$ contenant ce point et, par suite, tous les intervalles I_n à partir d'un certain rang, contredisant leur définition. C.Q.F.D.

Dans le théorème suivant, $E + x_0$ désigne le translaté de E par x_0 :

$$E + x_0 = \{y \mid y = x + x_0 \ , \ x \in E\}.$$

(Ne pas confondre $E + x_0$ avec $E + \{x_0\}$.)

Théorème 2 *La mesure extérieure $\lambda^* : \mathfrak{P}(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$ possède les propriétés suivantes :*

1. *$E \subseteq F$ implique que $\lambda^*(E) \leq \lambda^*(F)$;*
2. *quel que soit x_0, $\lambda^*(E + x_0) = \lambda^*(E)$;*
3. *pour tout intervalle (a, b), $\lambda^*((a, b)) = b - a$;*
4. *pour toute suite finie ou infinie d'ensembles $\{E_k\}_k$,*

$$\lambda^* \left(\bigcup_k E_k \right) \leq \sum_k \lambda^*(E_k).$$

Démonstration.

La première propriété (monotonie) suit de ce que tout recouvrement de F est aussi un recouvrement de E et la deuxième (invariance sous translation) découle de ce que la longueur d'un intervalle est invariante sous translation.

Pour démontrer la troisième, considérons d'abord le cas d'un intervalle compact $[a, b]$. Soit $\epsilon > 0$ arbitraire. La relation

$$[a, b] \subseteq]a - \epsilon, b + \epsilon[$$

montre que

$$\lambda^*([a, b]) \leq b - a + 2\epsilon$$

donc, $\epsilon > 0$ étant arbitraire, que

$$\lambda^*([a, b]) \leq b - a.$$

Pour obtenir l'inégalité opposée, il suffit, en vertu du théorème de Borel-Lebesgue, de montrer que, si

$$[a, b] \subseteq \bigcup_{k=1}^{N}]a_k, b_k[,$$

on a

$$b - a \leq \sum_{k=1}^{N} (b_k - a_k).$$

Pour ce faire, on peut supposer que les intervalles du recouvrement fini sont énumérés de telle sorte que

$$a_1 < a < a_2 < b_1 < a_3 < b_2 < \cdots < a_{N-1} < b_{N-2} < a_N < b_{N-1} < b < b_N.$$

Alors

$$\begin{aligned} &(b_N - a_N) + (b_{N-1} - a_{N-1}) + \cdots + (b_2 - a_2) + (b_1 - a_1) \\ &= b_N + (b_{N-1} - a_N) + (b_{N-2} - a_{N-1}) + \cdots + (b_1 - a_2) - a_1 \\ &> b_N - a_1 > b - a. \end{aligned}$$

Si l'intervalle (a, b) est borné, les inclusions

$$[a + \epsilon, b - \epsilon] \subseteq (a, b) \subseteq [a, b]$$

entraînent

$$b - a - 2\epsilon \leq \lambda^*((a, b)) \leq b - a.$$

Enfin, si l'intervalle (a, b) n'est pas borné, il contient des intervalles bornés de mesure extérieure arbitrairement grande et, par monotonie,

$$\lambda^*((a, b)) = +\infty = b - a.$$

Pour démontrer la quatrième propriété (sous-additivité), considérons pour chaque k une suite d'intervalles ouverts $\{\ ]a_j^k, b_j^k[\ \}_j$ tels que

$$E_k \subseteq \bigcup_j \,]a_j^k, b_j^k[\ ,\ \sum_j (b_j^k - a_j^k) \leq \lambda^*(E_k) + \frac{\epsilon}{2^k}.$$

Alors les intervalles $\{\ ]a_j^k, b_j^k[\ \}_{j,k}$ forment une famille au plus dénombrable (c'est-à-dire peuvent être rangés en une suite finie ou infinie) telle que

$$\bigcup_k E_k \subseteq \bigcup_k \bigcup_j \,]a_j^k, b_j^k[,$$

d'où

$$\lambda^*\left(\bigcup_k E_k\right) \leq \sum_k \sum_j (b_j^k - a_j^k) \leq \sum_k \lambda^*(E_k) + \epsilon.$$

C.Q.F.D.

2.2 Ensembles mesurables

La fonction λ^* que l'on vient d'introduire ne devient additive que si on la restreint à la classe des ensembles mesurables. Un ensemble $E \subseteq \mathbb{R}$ est un **ensemble mesurable** si

$$\text{quel que soit } A \subseteq \mathbb{R}\ ,\ \lambda^*(A) = \lambda^*(AE) + \lambda^*(AE^c).$$

Puisque, par sous-additivité, on a toujours

$$\text{quel que soit } A \subseteq \mathbb{R}\ ,\ \lambda^*(A) \leq \lambda^*(AE) + \lambda^*(AE^c),$$

il suffit, pour démontrer qu'un ensemble E est mesurable, de vérifier l'inégalité

$$\text{quel que soit } A \subseteq \mathbb{R}\ ,\ \lambda^*(A) \geq \lambda^*(AE) + \lambda^*(AE^c)$$

et, pour ce faire, on peut bien sûr supposer que

$$\lambda^*(A) < +\infty.$$

Théorème 3 *Pour toute suite finie ou infinie d'ensembles mesurables $\{E_k\}_k$ deux à deux disjoints, on a*

$$\lambda^*\left(\sum_k E_k\right) = \sum_k \lambda^*(E_k).$$