Vocabulaire ensembliste calculs algébriques

01

RÉPARTITION DES EXERCICES

I. ÉNONCÉS DES EXERCICES

1.01 Soit A et B deux parties d'un ensemble E. Montrer que si $A \cup B = A$ et $A \cap B = A$, alors $A = B$.

$\diamond$

1.02 Soit A et B deux parties d'un ensemble E.
Montrer qu'en général $(A \setminus B) \cup B \neq A$.

$\diamond$

1.03 Soit A l'ensemble des entiers naturels pairs et B l'ensemble des entiers naturels multiples de 3. Déterminer $A \cap B$ et $A \cup B$.

$\diamond$

1.04 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'ensemble des entiers naturels divisibles par n.
Déterminer les ensembles $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ et $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

$\diamond$

1.05 **1°)** Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a+1 < b-1$, déterminer $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \left[a+\frac{1}{n}, b-\frac{1}{n}\right]$.

2°) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$, déterminer $B = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \left[a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right]$.

$\diamond$

1.06 Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F. Soit $(A_i)_{i\in I}$ (respectivement $(B_j)_{j\in J}$) une famille de parties de E (resp. de F).
Vérifier les propriétés suivantes :
a) $f\big(\bigcup\limits_{i\in I} A_i\big) = \bigcup\limits_{i\in I} f(A_i)$.

b) $f\big(\bigcap\limits_{i\in I} A_i\big) \subset \bigcap\limits_{i\in I} f(A_i)$, et montrer que f est injective si et seulement si $\forall (A_1, A_2) \in (\mathcal{P}(E))^2, f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$.

c) $f^{-1}\big(\bigcup\limits_{j\in J} B_j\big) = \bigcup\limits_{j\in J} f^{-1}(B_j)$.

d) $f^{-1}\big(\bigcap\limits_{j\in J} B_j\big) = \bigcap\limits_{j\in J} f^{-1}(B_j)$.

◇

1.07 Soit f une application d'un ensemble E dans lui-même telle que $f \circ f = f$.

a) Montrer que si f est injective, alors $f = id_E$.

b) Montrer que si f est surjective, alors $f = id_E$.

◇

1.08 Soient E et F deux ensembles et f une application de E dans F.

a) Montrer que f est injective si et seulement si :

$$\forall\, A \in \mathcal{P}(E), f^{-1}(f(A)) = A.$$

b) Montrer que f est surjective si et seulement si :

$$\forall\, B \in \mathcal{P}(F), f(f^{-1}(B)) = B.$$

◇

1.09 Soient A et B deux parties d'un ensemble non vide E.
Soit $\varphi : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E), X \mapsto (X \cup A, X \cup B)$.

a) Montrer que φ est non surjective.

b) Montrer que φ est injective si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.

◇

1.10 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier les expressions suivantes :

a) $\sum\limits_{k=1}^{n} k$ **b)** $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2$ **c)** $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3$ **d)** $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2(n+1-k)$ **e)** $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2(k+1)$

f) $\sum\limits_{1\le i<j\le n}^{n} ij$ **g)** $\sum\limits_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}} \inf(i,j)$ **h)** $\sum\limits_{1\le i<j\le n} (j-i)$ (avec $n \geqslant 2$)

i) $\sum\limits_{1\le i\le j\le n} \dfrac{i^2}{2j+1}$.

◇

1.11 **Exemples de sommes ou produits télescopiques**

n étant un entier naturel, au moins égal à 2, simplifier les expressions suivantes :

a) $\sum\limits_{k=0}^{n} k.k!$ **b)** $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{k}{(k+1)!}$ **c)** $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)}$ **d)** $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)(k+2)}$

e) $\prod\limits_{k=1}^{n} \big(1 + \dfrac{2}{k(k+3)}\big)$ **f)** $\prod\limits_{k=2}^{n} \big(1 - \dfrac{2}{k(k+1)}\big)$

g) $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\sin \frac{1}{k(k+1)}}{\cos \frac{1}{k} \cos \frac{1}{k+1}}$ **h)** $\sum\limits_{k=2}^{n} \ln\left(\dfrac{\ln^2(k+1)}{\ln(k)\ln(k+2)}\right)$.

◇

1.12 Montrer que pour tout entier naturel k :

$$\frac{2k}{k^4+k^2+1} = \frac{1}{k^2-k+1} - \frac{1}{k^2+k+1}$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, simplifier l'expression $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{k}{k^4+k^2+1}$.

◇

1.13 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\sum\limits_{k=1}^{2n} (-1)^k k$.

◇

1.14 Calculer les sommes suivantes :

a) $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k+1}\dbinom{n}{k}$ **b)** $\sum\limits_{k=0}^{n} k\dbinom{n}{k}$ **c)** $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^{k-1}k\dbinom{n}{k}$

d) $\sum\limits_{k=0}^{m} (-1)^k\dbinom{n}{k}$ $(m \leqslant n)$ **e)** $\sum\limits_{j=0}^{m} \dbinom{n+j}{k}$ $(k \leqslant n)$ **f)** $\sum\limits_{k=0}^{n} (\dbinom{n}{k})^2$

g) $\sum\limits_{i=0}^{k} \dbinom{n}{i}\dbinom{m}{k-i}$ $(k \leqslant \min(m;n))$ **h)** $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k(\dbinom{n}{k})^2$

i) On considère deux entiers n et p, avec $p \leqslant n$. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = 2^p\binom{n}{p},$$

puis déterminer $\sum\limits_{k=0}^{p} (-1)^k\dbinom{n}{k}\dbinom{n-k}{p-k}$

Dans la plupart des cas on considèrera $n \geqslant 1$. Pour **f)** et **g)** on pourra donner une preuve combinatoire et une preuve utilisant la formule du binôme de Newton.

◇

1.15 Prouver que pour $n \geqslant 1$, $\sum\limits_{k=0}^{n} k\left(\dbinom{n}{k}\right)^2 = n\dbinom{2n-1}{n-1}$.

◇

1.16 Prouver que pour $n \geqslant 1$, $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k}\dbinom{n}{k} = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}$.

◇

1.17 $(*)$ On veut montrer que, pour tout entier naturel n :

$$\sum_{p=0}^{n} (-1)^p 4^{n-p}\binom{2n+1-p}{p} = n+1, \quad \sum_{p=0}^{n} (-1)^p 4^{n-p}\binom{2n-p}{p} = 2n+1$$

Pour cela, on pose :

$$a_n = \sum_{p=0}^{n} \left(-\frac{1}{4}\right)^p\binom{2n+1-p}{p}, \quad b_n = \sum_{p=0}^{n} \left(-\frac{1}{4}\right)^p\binom{2n-p}{p}$$

1°) Ecrire a_{n+1} en fonction de b_{n+1} et a_n, puis b_{n+1} en fonction de b_n et a_n.

2°) Donner une relation ne faisant intervenir que des termes de la suite $(a_n)_n$. Conclure alors à l'aide d'une récurrence.

◇

1.18 Quel est le coefficient de x^{17} dans le développement de $(1+x^5+x^7)^{20}$?

◇

1.19 On définit une famille d'entiers B_n^k de la façon suivante :

- on pose $B_0^0 = 1$,
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, si $k < 0$ ou $k > 2n$, alors $B_n^k = 0$,
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $B_{n+1}^{k+1} = B_n^{k-1} + B_n^k + B_n^{k+1}$.

1°) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+X+X^2)^n = \sum\limits_{k=0}^{2n} B_n^k X^k$.

2°) Calculer $B_n^0 + B_n^1 + \cdots + B_n^{2n}$ et $B_n^0 - B_n^1 + B_n^2 - \cdots + B_n^{2n}$

3°) Montrer que $(B_n^0)^2 + (B_n^1)^2 + \cdots + (B_n^{2n})^2 = B_{2n}^{2n}$.

◇

1.20 **a)** Montrer que pour tout entier naturel n, il existe deux entiers naturels a_n et b_n tels que $(1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$.

b) Montrer que l'on a aussi $(1-\sqrt{2})^n = a_n - b_n\sqrt{2}$, en déduire la valeur de $a_n^2 - 2b_n^2$.

c) En déduire l'existence d'un entier N tel que $(1+\sqrt{2})^n = \sqrt{N} + \sqrt{N-1}$.

◇

1.21 Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$(2n+1)! \times (2n-1)! \times \cdots \times 3! \times 1! \geqslant [(n+1)!]^{n+1}.$$

◇

1.22 $(*)$ Dans ce problème on cherche à démontrer que pour $n \in \mathbb{N}$, avec $n \geqslant 2$:

$$\sum_{p=0}^{n-1} \binom{2n}{p} (-1)^p (n-p)^2 = 0$$

a) Montrer pour $m \geqslant 1$ et q quelconque : $\sum\limits_{p=0}^{q} (-1)^p \binom{m}{p} = (-1)^q \binom{m-1}{q}$.

b) Montrer pour $m \geqslant 2$ et q quelconque :

$$\sum_{p=0}^{q} (-1)^p p \binom{m}{p} = (-1)^q m \binom{m-2}{q-1}$$

c) Calculer de même $\sum\limits_{p=0}^{q} (-1)^p p(p-1) \binom{m}{p}$ pour $m \geqslant 3$ et q quelconque.

d) Donner alors une expression de $\sum\limits_{p=0}^{q} (-1)^p (x-p)^2 \binom{m}{p}$ uniquement en fonction de x (réel quelconque), de m, q et du coefficient binomial $\binom{m-2}{q-1}$.

e) Prouver le résultat annoncé.

II. INDICATIONS

1.08. a) et **b)** Prouver séparément les deux sens et procéder par double inclusion.

1.09. b) Examiner $\varphi(A \cap B)$.

1.10. b) c) Partir du développement de $(k+1)^3$ ou $(k+1)^4$.

1.13. Séparer la somme suivant les indices pairs et les indices impairs.

1.14. d) et **e)** utiliser la formule $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$,

f) et **h)** écrire $\left(\binom{n}{k}\right)^2 = \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$.

1.15. Utiliser $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ et l'exercice **1. 14 g)**.

1.16. Utiliser $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ et $\binom{n-1}{k-1} = \frac{k}{n}\binom{n}{k}$.

1.17. Transformer l'écriture de a_{n+1} à l'aide de la formule de Pascal. Procéder de même pour b_{n+1}.

1.19. 3) Montrer que $B_n^k = B_n^{2n-k}$, puis utiliser une méthode analogue à celle du **1.14. f)**.

1.20. a) et **b)** Développer à l'aide de la formule du binôme de Newton, puis distinguer les indices pairs des indices impairs.

1.21. Procéder par récurrence.

III. CORRIGÉS DÉTAILLÉS DES EXERCICES

Corrigé 1.01

On a $B \subset A \cup B = A$ et $A = A \cap B \subset B$, donc $B \subset A$ et $A \subset B$, soit :

$$\boxed{A = B}$$

Corrigé 1.02

On a $B \subset (A \setminus B) \cup B$, donc si B « déborde » de A, l'ensemble $(A \setminus B) \cup B$ contient des éléments qui ne sont pas dans A.

On prend par exemple $A = \emptyset$ et $B \neq \emptyset$, alors $(A \setminus B) \cup B = \emptyset \cup B = B \neq A$.

Corrigé 1.03

$\star$ $A \cap B$ est l'ensemble des entiers naturels multiples à la fois de 2 et 3, donc qui contiennent 2 et 3 dans leur décomposition en facteurs premiers, c'est-à-dire qui sont multiples de 6 :

$$\boxed{A \cap B = 6.\mathbb{N}}$$

$\star$ $n \in A \cup B \iff 2 \mid n$ ou $3 \mid n$.

Classons les entiers selon leur reste dans la division par 6 :

Si $n \equiv 0 \pmod 6$ ou $n \equiv 2 \pmod 6$ ou $n \equiv 4 \pmod 6$, alors n est pair et appartient à $A \cup B$.

Si $n \equiv 3 \pmod 6$, alors n est multiple de 3 et appartient à $A \cup B$.

Si $n \equiv 1 \pmod 6$ ou $n \equiv 5 \pmod 6$, alors n est de la forme $6k+1$ ou $6k+5$ et n'est pas divisible par 2 (le reste vaut 1) ni par 3 (le reste vaut 1 ou 2), donc n n'appartient pas à $A \cup B$.

$$\boxed{A \cup B = \big\{n \in \mathbb{N} \,/\, \exists\, k \in \mathbb{N}, \exists\, r \in \{0,2,3,4\}\big\}, n = 6k + r\big\}}$$

Corrigé 1.04

$\star$ $\mathbb{N} = A_1 \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \mathbb{N}$, donc $\boxed{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbb{N}}$

$\star$ 0 appartient à tous les A_n, donc $0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$,

soit alors $p \in \mathbb{N}^*$, p n'est pas un multiple de $p+1$, donc $p \notin A_{p+1}$ et *a fortiori* n'appartient pas à l'intersection des A_n, soit :

$$\boxed{\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{0\}}$$

Corrigé 1.05

1°) Posons $S_n = \left[a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}\right]$, pour tout n, on a :

$$a + \frac{1}{n+1} < a + \frac{1}{n} < b - \frac{1}{n} < b - \frac{1}{n+1}$$

donc $S_n \subset S_{n+1}$ et on a affaire à une suite croissante de segments.

$\star$ Si $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$, alors $\exists\, n \in \mathbb{N}^*, x \in S_n$, ce qui entraîne $x > a$ et $x < b$.

$\star$ Réciproquement, si $x > a$ et $x < b$, on peut trouver un entier $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $a + \frac{1}{n_0} \leqslant x < b - \frac{1}{n_0}$, il suffit pour cela d'avoir $n_0 \geqslant \frac{1}{x-a}$ et $n_0 \geqslant \frac{1}{b-x}$, on peut donc prendre $n_0 = 1 + \max\left(\left\lfloor \frac{1}{x-a} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{1}{b-x} \right\rfloor\right)$, x appartient alors à S_{n_0} donc à la réunion des S_n.

Ainsi :

$$\boxed{A = \,]a, b[}$$

2°) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $[a,b] \subset I_n = \left]a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right[$, donc $[a,b] \subset B = \bigcap_{i=1}^{\infty} I_n$.

Réciproquement soit $x \in B$, alors $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, a - \frac{1}{n} < x < b + \frac{1}{n}$, un passage à la limite dans ces inégalités donne *a priori* des inégalités larges et $a \leqslant x \leqslant b$, c'est-à-dire $x \in [a,b]$. Ainsi :

$$\boxed{B = [a, b]}$$

Ces exemples prouvent qu'une réunion infinie d'intervalles fermés peut être un intervalle ouvert et qu'une intersection infinie d'intervalles ouverts peut être un intervalle fermé.

Corrigé 1.06

a) $y \in f\big(\bigcup_{i\in I} A_i\big) \iff \exists\, x \in \bigcup_{i\in I} A_i, y = f(x) \iff \exists\, i \in I, \exists\, x \in A_i, y = f(x)$

$$\iff \exists\, i \in I, y \in f(A_i) \iff y \in \bigcup_{i\in I} f(A_i).$$

Donc :

$$\boxed{f\big(\bigcup_{i\in I} A_i\big) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)}$$

b) $\star$ Soit $y \in f\big(\bigcap_{i\in I} A_i\big)$, alors $\exists\, x \in \bigcap_{i\in I} A_i$ tel que $y = f(x)$.

On a donc, pour tout $i \in I$, $x \in A_i$ et $y = f(x)$, d'où $\forall\, i \in I, y \in f(A_i)$, soit :

$$\boxed{f\big(\bigcap_{i\in I} A_i\big) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i)}$$

Il n'était pas possible de raisonner ici par équivalence, car si $\forall\, i \in I, y \in f(A_i)$, alors pour chaque i il existe un élément x_i dans A_i tel que $y = f(x_i)$, mais rien ne permet d'affirmer que l'on peut choisir x_i indépendamment de i.

$\star$ Supposons que $\forall (A_1, A_2) \in (\mathcal{P}(E))^2, f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$ et supposons f non injective.
Il existe alors $(x_1, x_2) \in E^2$, avec $x_1 \neq x_2$ et $f(x_1) = f(x_2)$.
Prenons $A_1 = \{x_1\}$ et $A_2 = \{x_2\}$, on a :

$$A_1 \cap A_2 = \emptyset \text{ et } f(A_1) \cap f(A_2) = \{f(x_1)\} \cap \{f(x_2)\} = \{f(x_1)\} \neq \emptyset$$

Ceci contrdit l'hypothèse de l'énoncé et f est donc injective.

$\star$ Réciproquement, supposons f injective et soit $(A_1, A_2) \in (\mathcal{P}(E))^2$.
Soit $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$, alors $y \in f(A_1)$ et $y \in f(A_2)$, donc :

$$\exists\, x_1 \in A_1, y = f(x_1) \text{ et } \exists\, x_2 \in A_2, y = f(x_2)$$

Par conséquent $f(x_1) = f(x_2)$ et donc $x_1 = x_2 \in A_1 \cap A_2$, d'où $y \in f(A_1 \cap A_2)$.
Ainsi $f(A_1) \cap f(A_2) \subset f(A_1 \cap A_2)$ et comme l'inclusion contraire est toujours vraie, on a l'égalité.

$$\boxed{\forall (A_1, A_2) \in (\mathcal{P}(E))^2, f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2) \iff f \text{ injective}}$$

c) $x \in f^{-1}\big(\bigcup_{j\in J} B_j\big) \iff f(x) \in \bigcup_{j\in J} B_j \iff \exists\, j \in J, f(x) \in B_j$

$$\iff \exists\, j \in J, x \in f^{-1}(B_j) \iff x \in \bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j)$$

Donc :

$$\boxed{f^{-1}\big(\bigcup_{j\in J} B_j\big) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j)}$$

d) $x \in f^{-1}\big(\bigcap_{j\in J} B_j\big) \iff f(x) \in \bigcap_{j\in J} B_j \iff \forall\, j \in J, f(x) \in B_j$

$$x \in f^{-1}\big(\bigcap_{j\in J} B_j\big) \iff \forall\, j \in J, x \in f^{-1}(B_j) \iff x \in \bigcap_{j\in J} f^{-1}(B_j)$$

Donc :

$$\boxed{f^{-1}\big(\bigcap_{j\in J} B_j\big) = \bigcap_{j\in J} f^{-1}(B_j)}$$

Corrigé 1.07

On a : $\forall\, x \in E, f\big(f(x)\big) = f(x)$.

a) Si f est injective, l'égalité précédente donne, pour tout $x \in E$, $f(x) = x$ et f est l'identité de E.

b) Si f est surjective, soit $x \in E$, il existe $t \in E$ tel que $x = f(t)$, et alors l'hypothèse donne : $f(x) = f\big(f(t)\big) = f(t) = x$. Ceci étant vrai pour tout $x \in E$, on a encore $f = id_E$.

Corrigé 1.08

a) $\star$ Supposons f injective. Soit alors $A \in \mathcal{P}(E)$.

$\rightarrow$ Soit $x \in A$, alors $f(x) \in f(A)$, ce qui donne, par définition même de l'image réciproque, $x \in f^{-1}(f(A))$, donc $A \subset f^{-1}(f(A))$ (il est à noter que l'injectivité n'a pas été utile).

$\rightarrow$ Soit $x \in f^{-1}(f(A))$, alors $f(x) \in f(A)$, donc il existe $y \in A$ tel que $f(y) = f(x)$ et comme f est injective, $y = x$ et donc $x \in A$, ainsi $f^{-1}(f(A)) \subset A$.

Par double inclusion, on a donc :

$$f \text{ injective} \implies \forall\, A \in \mathcal{P}(E), A = f^{-1}(f(A))$$

$\star$ Réciproquement, supposons que l'on ait l'identité ensembliste précédente.

Soit $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$. On a donc :

$$\{x\} = f^{-1}(\{f(x)\}) = f^{-1}(\{f(y)\}) = \{y\}$$

et f est injective. Ainsi :

$$\boxed{f \text{ injective} \iff \forall\, A \in \mathcal{P}(E), A = f^{-1}(f(A))}$$

b) $\star$ Supposons f surjective. Soit alors $B \in \mathcal{P}(F)$.

$\rightarrow$ Soit $y \in f(f^{-1}(B))$, alors il existe $x \in f^{-1}(B)$ tel que $y = f(x)$ et comme $x \in f^{-1}(B)$ signifie que $f(x) \in B$, on a $y \in B$ et $f(f^{-1}(B)) \subset B$ (notons également que la surjectivité de f n'a pas été utile).

$\rightarrow$ Soit $y \in B$, comme f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x) \in B$. Donc $x \in f^{-1}(B)$ et $y = f(x) \in f(f^{-1}(B))$, donc $B \subset f(f^{-1}(B))$.

Par double inclusion, on a donc :

$$f \text{ surjective} \implies \forall\, B \in \mathcal{P}(F), B = f(f^{-1}(A))$$

$\star$ Réciproquement, supposons que l'on ait l'identité ensembliste précédente. On a en particulier, $f(f^{-1}(F)) = F$. Mais par définition d'une **application** $f^{-1}(F) = E$. On a donc ici $f(E) = F$, ce qui est la surjectivité de f. Ainsi :

$$\boxed{f \text{ surjective} \iff \forall\, B \in \mathcal{P}(F), B = f(f^{-1}(A))}$$