CHAPITRE 1
PROBABILITÉS

Rappel de cours

Evénements

Les probabilités visent à formaliser les expériences aléatoires.
Une expérience aléatoire est une expérience dont on ne connaît pas le résultat à l'avance (lancer un dé, tirer une carte, ou, en médecine, rechercher un signe clinique ou effectuer un dosage biologique sont des expériences aléatoires).
L'ensemble des résultats possibles de l'expérience est l'ensemble fondamental E.
Ses éléments sont les événements élémentaires.
Un événement aléatoire (on écrira souvent un événement) est un sous-ensemble de E.
Les opérations sur les événements sont donc les opérations sur les ensembles:

- l'intersection : $A \cap B$ est l'ensemble des événements élémentaires qui sont à la fois dans A et dans B
- l'union : $A \cup B$ est l'ensemble des événements élémentaires qui sont dans A ou dans B (ou dans les 2 à la fois)
- le complémentaire (^{C}): A^C est l'ensemble des événements élémentaires qui ne sont pas dans A

Il est parfois utile dans les exercices d'utiliser les *formules de Morgan :*
$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$ et $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$ (1.1)

Si E contient n événements élémentaires, il y a 2^n événements, en comptant E et $\varnothing$, l'ensemble vide qui ne contient aucun événement élémentaire.

Probabilités

Une probabilité associe à chaque événement A un nombre P(A) dans [0, 1]. Les probabilités vérifient les axiomes suivants :

- $P(E) = 1$
- Si A et B sont 2 événements disjoints ($A \cap B = \varnothing$), alors
  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (1.2)

On déduit de ces axiomes 2 formules importantes :

- $P(A^C) = 1 - P(A)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ (1.3)

Probabilités conditionnelles

P(A | B) (lire « probabilité de A sachant B, ou conditionnellement à B) est la probabilité de A si on sait que B s'est produit. On a :

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \tag{1.4}$$

Indépendance de 2 événements

A et B sont indépendants si et seulement si
$P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$ (1.5)

On a aussi : si A et B sont indépendants, $P(A | B) = P(A)$ et $P(B | A) = P(B)$

Remarque : si A et B sont indépendants, les couples d'événements
(A et B^C), (A^C et B) et (A^C et B^C) le sont aussi. (1.6)

Formules des probabilités totales

- forme simple : $P(A) = P(A | B)\,P(B) + P(A | B^C)\,P(B^C)$ (1.7)
- forme étendue : une partition est un ensemble d'événements qui sont disjoints 2 à 2 et dont l'union égale E. Si $B_1, B_2, ..., B_n$ forment une partition, alors

$P(A) = P(A | B_1)P(B_1) + P(A | B_2)P(B_2) + \dots + P(A | B_n)P(B_n)$ (1.8)

Formules de Bayes

- simple : $$P(B|A)=\frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B)+P(A|B^C)P(B^C)} \tag{1.9}$$

étendue: si $B_1, B_2, ..., B_n$ forment une partition, alors

$$P(B_i|A)=\frac{P(A|B_i)P(B_i)}{P(A|B_1)P(B_1)+...+P(A|B_n)P(B_n)} \tag{1.10}$$

Double conditionnement et indépendance conditionnelle[1]

Les probabilités conditionnelles sont des probabilités. On peut, par exemple, conditionner par rapport à un événement B alors qu'on a déjà conditionné par rapport à un événement C. On a alors les formules suivantes :
Si on note $P_C(\,.) = P(. | C)$ la probabilité conditionnelle par rapport à C.

$$P_C(A|B)=\frac{P_C(A\cap B)}{P_C(B)}$$, ou, en revenant aux probabilités initiales,

$$P(A|B\cap C)=\frac{P(A\cap B\cap C)}{P(B\cap C)} \tag{1.11}$$

1 Ce paragraphe n'est souvent pas explicité dans le cours mais il fait parfois l'objet de questions aux concours.

On définit de même l'indépendance conditionnelle de A et B sachant C :

A et B sont indépendants conditionnellement à C si et seulement si
$P_C(A \cap B) = P_C(A)\ P_C(B)$, ou encore $P(A \cap B \mid C) = P(A \mid C)\ P(B \mid C)$ (1.12)

Analyse combinatoire[2]

L'analyse combinatoire se place dans une configuration particulière : on a un ensemble fondamental E à n événements élémentaires, qui ont tous la même probabilité, égale à 1/n. La probabilité d'un événement est donc simplement égale au nombre d'événements élémentaires qu'il contient divisé par n.
Pour résoudre une question d'analyse combinatoire, on effectue en général deux comptages : celui du nombre d'événements de E, et celui du nombre d'événements élémentaires de l'événement dont il faut calculer la probabilité. On utilise souvent les formules suivantes :

Permutations (n) :
le nombre de permutations de n éléments est
$n! = 1 \times 2 \times .. \times (n-1) \times n$. (1.13)

Exemple : si E = {a, b, c}, les permutations sont (abc, acb, bac, bca, cab, cba) et
$3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$.
Par convention, $0! = 1$.

Combinaisons (n, k) :
le nombre de sous-ensembles de k éléments qu'on peut construire à partir d'un ensemble de n éléments est

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (1.14)$$

Exemple : pour n = 4 et k = 2, on a : si E = {a, b, c, d}, les combinaisons 2 à 2 parmi E sont (ab, ac, ad, bc, bd, cd), et $C_4^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{24}{(2 \times 2)} = 6$

Arrangements (n, k) :
Les arrangements sont des sous-ensembles ordonnés. Leur nombre est donc celui des combinaisons multiplié par le nombre de permutations de k éléments. On a donc :

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} \quad (1.15)$$

Dans l'exemple précédent, les arrangement sont (ab, ba, ac, ca, …, cd, dc) donc au nombre de 12.

2 L'analyse combinatoire figure au programme de certaines facultés mais est hors programme pour d'autres. Il faut vous informer pour savoir si des questions peuvent être posées au concours concernant cette partie du cours.

QCM

■ QCM 1

Soit E = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} un ensemble fondamental dont chaque événement élémentaire a une probabilité égale à 0,1. Soient les événements A = {2, 4, 6, 8, 10}, B = {3, 4, 5, 10} et C = {1, 2, 3, 4, 5}. Parmi les égalités suivantes, laquelle (ou lesquelles) est (sont) exacte(s) ?

A. $P(A \cap B) = 0{,}2$
B. $P(A \cap B) = 0{,}3$
C. $P(A \cap C) = 0{,}2$
D. $P(A \cap C) = 0{,}3$
E. $P(B \cap C^C) = 0{,}2$

QCM 2 (suite du QCM 1)

Parmi les égalités suivantes, laquelle (ou lesquelles) est (sont) exacte(s) ?

A. $P(A \cup B) = 0{,}7$
B. $P(A \cup B) = 0{,}8$
C. $P(A \cup C) = 0{,}7$
D. $P(A \cup C) = 0{,}8$
E. $P(B \cup C^C) = 0{,}7$

QCM 3 (suite du QCM 1)

Parmi les propositions suivantes, laquelle (ou lesquelles) est (sont) vraie(s) ?

A. A et B sont indépendants
B. B et C sont indépendants
C. $(A \cap B)$ et $(B \cap C)$ sont indépendants
D. $(A \cap B)^C$ et $(B \cap C)$ sont indépendants
E. $(A \cap B)$ et C^C sont indépendants

QCM 4 (suite du QCM 1)

Parmi les égalités suivantes, laquelle (ou lesquelles) est (sont) exacte(s) ?

A. $P(A \mid B) = 0{,}50$
B. $P(A \cap B \mid C) = 0{,}20$
C. $P(A \cap B \mid A \cup B) = 0{,}40$
D. $P(A \mid B \cup C) = 0{,}40$
E. $P(A \cap B \mid B \cup C) = 0{,}25$

■ QCM 5

Dans une famille de 2 enfants, quelle est la probabilité qu'il y ait 2 garçons sachant qu'il y a au moins un garçon ?

A. 0,20
B. 0,25
C. 0,33
D. 0,50
E. 0,67

QCM 6 (suite du QCM 5)

Quelle est la probabilité qu'il y ait 2 garçons sachant que l'aîné des enfants est un garçon ?

A. 0,20
B. 0,25
C. 0,33
D. 0,50
E. 0,67

■ QCM 7

Soit une famille de 3 enfants, sans jumeaux. On s'intéresse au sexe et à l'ordre des naissances des enfants. Combien l'ensemble fondamental contient-il d'événements élémentaires ?

A. 3
B. 4
C. 8
D. 64
E. 256

QCM 8 (suite du QCM 7)

Combien peut-on définir d'événements aléatoires au total ?

A. 3
B. 4
C. 8
D. 64
E. 256

QCM 9 (suite du QCM 7)

Quelle est la probabilité pour qu'il y ait exactement 1 garçon dans cette famille ?

A. 0,125
B. 0,25
C. 0,33
D. 0,375
E. 0,5

QCM 10 (suite du QCM 7)

Quelle est la probabilité pour qu'il y ait au moins une fille ?

A. 0,125
B. 0,25
C. 0,37
D. 0,50
E. 0,875

QCM 11 (suite du QCM 7)

Soient A= « Tous les enfants sont de même sexe », B= « Il y a au moins 2 garçons », C = « Il y a au plus 2 garçons ». Quels sont les couples d'événements indépendants ?

A. A et B
B. A et C
C. B et C
D. $(A \cap B)$ et C
E. $(A \cap C)$ et B

QCM 12 (suite du QCM 7)

Quelle est la probabilité que l'enfant la plus jeune soit une fille sachant qu'il y a au moins 2 filles ?

A. 0,25
B. 0,33
C. 0,50
D. 0,67
E. 0,75

■ **QCM 13**

Après un certain type de cancer, la probabilité de décéder dans l'année qui suit le diagnostic est égale à 0,20. Si on survit la première année, la probabilité de survivre encore un an est de 0,80, et la probabilité d'être vivant 3 ans après le diagnostic est de 0,48.

Quelle est la probabilité de survivre au moins 2 ans après le diagnostic de cancer ?

A. 0,04
B. 0,16
C. 0,25
D. 0,64
E. 0,80

QCM 14 (suite du QCM 13)

Quelle est la probabilité de décéder dans la deuxième année qui suit le diagnostic ?

A. 0,04
B. 0,16
C. 0,25
D. 0,64
E. 0,80

QCM 15 (suite du QCM 13)

Quelle est la probabilité de décéder dans la troisième année qui suit le diagnostic si on est vivant après 2 ans ?

A. 0,04
B. 0,16
C. 0,25
D. 0,64
E. 0,80

■ **QCM 16**

Une maladie M se présente sous deux formes cliniques, une modérée et une sévère. La proportion de formes modérées est 0,70. Les proportions de malades fébriles valent 0,40 et 0,80 dans les formes modérées et sévères, respectivement.

Quelle est la proportion de malades fébriles parmi les individus atteints de la maladie M ?

A. 0,12
B. 0,52
C. 0,56
D. 0,60
E. 0,68

QCM 17 (suite du QCM 16)

Si un malade atteint de M est fébrile, quelle est la probabilité pour qu'il soit atteint de la forme sévère ?

A. 0,33
B. 0,46
C. 0,50
D. 0,52
E. 0,60

■ **QCM 18**

Soient 2 événements A et B tels que $P(A) = 0,7$, $P(A \cap B) = 0,4$ et $P(A \mid B) = 0,8$.

Quelle est la valeur de $P(B)$?

A. 0,10
B. 0,20
C. 0,30
D. 0,40
E. 0,50

QCM 19 (suite du QCM 18)

Quelle est la valeur de $P(A \cap B^C)$?

A. 0,10
B. 0,20
C. 0,30
D. 0,40
E. 0,50

QCM 20 (suite du QCM 18)

Quelle est la valeur de $P(A^C \cap B^C)$?

A. 0,10
B. 0,20
C. 0,30
D. 0,40
E. 0,50

■ **QCM 21**

Soient 2 événements A et B tels que $P(A \cap B) = 0{,}1$, $P(A \cup B^C) = 0{,}6$ et $P(A^C \mid B^C) = 0{,}8$. Quelle est la valeur de P(B) ?

A. 0,10
B. 0,20
C. 0,30
D. 0,40
E. 0,50

QCM 22 (suite du QCM 21)

Quelle est la valeur de $P(A^C \cap B^C)$?

A. 0,10
B. 0,20
C. 0,30
D. 0,40
E. 0,50

QCM 23 (suite du QCM 21)

Quelle est la valeur de P(A) ?

A. 0,10
B. 0,20
C. 0,30
D. 0,40
E. 0,50

■ **QCM 24**

Un individu né dans les années 1950 avait une probabilité égale à 0,95 d'atteindre l'âge de 18 ans. S'il atteignait 18 ans, il avait une probabilité égale à 0,1 de se présenter au baccalauréat. Parmi les candidats au baccalauréat, on suppose qu'il y a 80 % de reçus. Parmi les titulaires du baccalauréat, 10 % choisissent de s'inscrire à la faculté de médecine. Un étudiant inscrit en première année de médecine a 10 % de chances de devenir médecin. Quelle est la proportion de médecins parmi les personnes nées dans les années 1950 ?

A. 0,000076
B. 0,00076
C. 0,0076
D. 0,076
E. 0,2