Chapitre 1

Algèbre élémentaire

1.1 Nombres complexes

1.1.1 Connaissances de base sur les nombres complexes

On commence par des formules que l'on oublie très facilement. Je ne les ai vraiment sues qu'au moment des concours et chaque année, j'ai toujours insisté pour que mes étudiants les connaissent !

Les formules d'addition

$$\begin{aligned}
\cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \\
\cos(a-b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \\
\sin(a+b) &= \sin a \cos b + \sin b \cos a \\
\sin(a-b) &= \sin a \cos b - \sin b \cos a
\end{aligned}$$

Les formules de linéarisation

$$\begin{aligned}
\cos a \cos b &= \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)] \\
\sin a \sin b &= \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)] \\
\sin a \cos b &= \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]
\end{aligned}$$

Les formules de factorisation

$$
\begin{aligned}
\sin p + \sin q &= 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} \\
\sin p - \sin q &= 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2} \\
\cos p + \cos q &= 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} \\
\cos p - \cos q &= -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}
\end{aligned}
$$

Toutes ces formules sont déduites des **formules d'Euler**

$$\cos\theta = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{-i\theta}),\ \sin\theta = \frac{1}{2i}(\mathrm{e}^{i\theta} - \mathrm{e}^{-i\theta}).$$

et de la formule fondamentale de l'exponentielle :

$$\mathrm{e}^{i(a+b)} = \mathrm{e}^{ia} \times \mathrm{e}^{ib}.$$

On continue avec l'un des piliers du raisonnement mathématique :

Théorème 1.1. **Récurrence**
Si p est une propriété définie sur $\mathbb{N}$ alors

$$\big((p(0)) \text{ et } \big(\forall x \in \mathbb{N}, (p(x) \Rightarrow p(x+1))\big) \Rightarrow (\forall x \in \mathbb{N}, p(x))\big).$$

***Remarque* 1.1.1.** *On peut élargir la notion de récurrence et parler de*

(*i*) *Récurrence finie : propriété vérifiée jusqu'à un certain rang.*

(*ii*) *Récurrence à partir d'un certain rang.*

(*iii*) *Récurrence double, triple, etc.*

On dégage aussi les notions de récurrence simple (ou faible) exposée dans le théorème précédent et la récurrence forte (ou transfinie) où pour avoir la propriété vraie à l'ordre $n+1$, on utilise la propriété pour tout $k \leqslant n$.

Les nombres complexes sont très liés à la géométrie plane euclidienne comme le prouve la propriété suivante :

Proposition 1.1.1. *Soit M un point d'affixe z et M' d'affixe z', on a $\overrightarrow{OM'} = R_{\pi/2}\overrightarrow{OM}$ (où $R_{\pi/2}$ désigne une rotation d'angle $\pi/2$ autour de l'origine O) ssi $z' = iz$.*

On a besoin aussi de formules plus générales :

THÉORÈME 1.2. **Formule du binôme de Newton**
Soit $A = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $(a,b) \in A^2$, alors

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

PROPOSITION 1.1.2. ***Somme des termes d'une suite géométrique***
Si (a,b) est un couple de réels ou de complexes alors on a

$$a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1} b^k.$$

1.1.2 Exercices sur les nombres complexes

EXERCICE 1.1.1. **I** **0**

Démontrer la formule

$$\prod_{i=1}^{n} \cos a_i = \frac{1}{2^n} \sum_{\varepsilon_i \in \{-1,1\}} \cos \left(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i a_i \right)$$

Commentaires : *voilà pour commencer une belle formule de trigonométrie ! Les nombres complexes et la notation exponentielle donnent les célèbres formules de trigo que chacun se dépêche d'oublier. J'espère que vous n'oublierez pas celle-ci. Elle m'a été signalée par un ami qui se demandait si elle portait un nom mais il n'a pas eu de réponse...*

EXERCICE 1.1.2. **I** **0**

On considère un quadrilatère $ABCD$ convexe dans le plan. Sur chaque côté on construit un carré qui s'appuie sur le côté et tourné vers l'extérieur, et on nomme P, Q, R, S les centres de ces carrés. Montrer que PR et QS sont orthogonaux.

Commentaires : *Ceci est un exercice qui illustre bien comment on peut répondre simplement à une question de géométrie plane en utilisant les* *nombres complexes. Cet exercice a été donné à l'École Polytechnique et le candidat n'a pas tout de suite pensé à utiliser les nombres complexes !*

Exercice 1.1.3. **F 1**

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
Montrer que si $\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{iy} + \mathrm{e}^{iz} = 0$ alors $\mathrm{e}^{2ix} + \mathrm{e}^{2iy} + \mathrm{e}^{2iz} = 0$.

Commentaires : *on peut avoir des difficultés avec cette question car on ne sait pas comment la prendre. Une fois qu'on a compris la démarche à suivre, la résolution ne pose pas de problème.*

Exercice 1.1.4. **F 0**

Si $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, on pose $c = \dfrac{a - b}{1 - \overline{a}b}$, montrer que :

(i) $|c| = 1 \Leftrightarrow (|a| = 1)$ ou $(|b| = 1)$.

(ii) $|c| < 1 \Leftrightarrow \big((|a| < 1)\text{et}(|b| < 1)\big)$ ou $\big((|a| > 1)\text{et}(|b| > 1)\big)$

Commentaires : *cet exercice était posé en terminale il y a longtemps. Il se fait assez bien mais il demande de se débrouiller avec les nombres complexes et c'est en ce sens qu'il est intéressant.*

Exercice 1.1.5. **I C 1**

On considère n points A_k d'affixe z_k, $n \geqslant 3$. Ces points sont supposés distincts, non situés sur la même droite partant de l'origine, aucun n'étant d'affixe nulle.
On pose $a_k = \dfrac{z_k}{|z_k|}$ et on suppose que $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = 0$. Soit M un point quelconque d'affixe z.

1. Étudier le nombre complexe : $\sum\limits_{k=1}^{n} \bar{a}_k(z - z_k)$.
2. Montrer que $\sum\limits_{k=1}^{n} |z_k| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} |z - z_k|$; étudier les cas d'égalité.
3. Interprétation géométrique : étant donné un triangle A, B, C dont les angles sont compris entre 0 et $2\pi/3$, trouver les points M du plan réalisant le minimum de $MA + MB + MC$.

Commentaires : *ceci est un exemple simple de l'utilisation des nombres complexes en géométrie. Si on essaie de répondre à la dernière question sans l'intervention de $\mathbb{C}$, cela devient beaucoup plus compliqué.*

Exercice 1.1.6. **I C T 1**

Montrer l'égalité : $\displaystyle\sum_{q=0}^{2n-1} \cos^{2p}\left(x + \frac{q\pi}{2n}\right) = \frac{2n\dbinom{2p}{p}}{2^{2p}}, \quad p < n.$

Commentaires : *c'est une formule surprenante car le résultat ne dépend pas d'x. Ce qu'il y a aussi de remarquable, c'est toute la série de simplifications dans les calculs et cela en a fait l'un de mes exos fétiches.*

Exercice 1.1.7. **F C 1**

Calculer $S_n(x) = \dfrac{1}{2} + \cos x + \cdots + \cos nx$ puis $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} S_k(x)$.

Commentaires : *c'est en effet une question très classique. Je l'ai posée régulièrement chaque année. Les formules obtenues sont très utiles pour la théorie des séries de Fourier.*

Exercice 1.1.8. **F 0**

Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$ tels que $a + c = b + d$, $a + ib = c + id$.
Quelle est la figure formée par les 4 images de a, b, c, d dans le plan complexe ? En déduire l'existence d'un nombre complexe z tel que

$$(z - a)^4 = (z - b)^4 = (z - c)^4 = (z - d)^4.$$

Commentaires : *avec ces questions, on rencontre à nouveau la synergie qui existe entre les nombres complexes et la géométrie plane euclidienne. Les mathématiciens qui se sont servi des nombres complexes n'ont vu ces relations qu'à partir du XIX*^e^ *siècle...*

1.2 Groupes, anneaux, corps

1.2.1 Connaissances de base sur les structures algébriques élémentaires

Tout d'abord, reprenons la définition d'un groupe :

DÉFINITION 1.2.1. ***Groupe, sous-groupe***

$(G, *)$ est un groupe ssi$_{déf}$ $*$ est une loi de composition interne vérifiant :

(i) *$*$ est associative.*

(ii) *$*$ possède un élément neutre.*

(iii) *Tout élément a un inverse.*

Si de plus $*$ est commutative, on dit que G est abélien (ou commutatif).
$H \subset G$ est un sous-groupe de G ssi$_{déf}$ H est non vide et $\forall(x, y) \in H$, $xy^{-1} \in H$.
Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité sur la loi $*$, on omet souvent de l'écrire (comme dans la définition d'un sous-groupe ci-dessus).

et quelques propriétés immédiates que l'on peut en déduire :

PROPOSITION 1.2.1.

(i) *Dans un groupe, tout élément est **régulier** (i.e. $ab = ac \Rightarrow b = c$).*

(ii) $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.

(iii) *$\gamma_a : x \mapsto ax$ est une bijection ainsi que $\delta_a : x \mapsto xa$; lorsque le groupe est fini, on peut dresser une table de multiplication des éléments du groupe appelé carré latin : sur chaque ligne et chaque colonne, on ne retrouve chaque élément qu'une fois et une seule.*

DÉFINITION 1.2.2. ***Partie génératrice d'un groupe***

On dit que $A \subset G$ est une partie génératrice du groupe G ssi$_{déf}$ le plus petit sous-groupe de G contenant A n'est autre que G. En particulier, tout élément x de G s'écrit comme un produit fini d'éléments de A et de leurs inverses (i.e. si on note A^{-1} l'ensemble des inverses des éléments de A, il existe $a_1, \ldots, a_n$ éléments de $A \cup A^{-1}$ tels que $x = a_1 \ldots a_n$).

DÉFINITION 1.2.3. ***Morphisme de groupe***

Soient G et G' deux groupes. $f : G \to G'$ est un morphisme de groupe ssi$_{déf}$ $\forall(x, y) \in G^2$, $f(xy) = f(x)f(y)$. $N = f^{-1}(e')$ est le noyau de f où e' est l'élément neutre de G'.

L'image $f(G)$ du groupe G par f est un sous-groupe de G' et le noyau $\operatorname{Ker} f = f^{-1}(e')$ est un sous-groupe de G.

Après la structure de groupe, on trouve celle d'anneau où l'on rajoute une loi notée multiplicativement.

DÉFINITION 1.2.4. ***Anneau, sous-anneau***

$(A, +, \times)$ *est un anneau ssi*$_{déf}$

(*i*) $(A, +)$ *est un groupe abélien,*

(*ii*) $\times$ *est une loi interne, associative ayant un élément neutre (souvent noté 1),*

(*iii*) $\times$ *est distributive à droite et à gauche par rapport à* $+$ *i.e.*

$$\forall (a, b, c) \in A^3, \ a \times (b + c) = a \times b + a \times c \text{ et } \\ (a + b) \times c = a \times c + b \times c.$$

Si $\times$ *est commutative, on dit que* A *est commutatif.*
On note $U(A) = \{x \in A \mid \exists y \in A, \ x \times y = y \times x = 1\}$ *l'ensemble des éléments inversibles de* A *: on l'écrit aussi* A^* *mais il y a risque de confusion avec* $A \setminus \{0\}$.
Enfin, B *est un sous-anneau de* A *ssi*$_{déf}$ $1 \in B$, $(B, +)$ *est un sous-groupe de* $(A, +)$ *stable pour* $\times$.

Pour terminer les structures élémentaires, il reste la notion de corps (qui est toujours commutatif depuis les années 1970 en France...).

DÉFINITION 1.2.5. ***Corps, sous-corps***

$(\mathbb{K}, +, \times)$ *est un corps ssi*$_{déf}$

(*i*) $(\mathbb{K}, +)$ *est un groupe abélien.*

(*ii*) $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \times)$ *est un groupe abélien.*

(*iii*) $\times$ *est distributive par rapport à* $+$.

(ou bien $(\mathbb{K}, +, \times)$ *est un anneau commutatif et l'ensemble des éléments inversibles de* $\mathbb{K}$, $U(\mathbb{K})$ *est* $\mathbb{K} \setminus \{0\}$*).*
$\mathbb{L}$ *est un sous-corps de* $\mathbb{K}$ *ssi*$_{déf}$ $\mathbb{L}$ *est un sous-anneau de* $\mathbb{K}$ *et tout élément non nul de* $\mathbb{L}$ *est inversible dans* $\mathbb{L}$.

1.2.2 Exercices sur les groupes

EXERCICE 1.2.1. **F 1**

Soit G un groupe ; on suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\forall (a,b) \in G^2, \forall i \in \{k-1, k, k+1\} : (ab)^i = a^i b^i.$$

Montrer que G est abélien.
Étude des cas $k = 1$, $k = 0$.

Commentaires : *on vous propose ici une petite manipulation sur les groupes qui fournit la solution. C'est souvent le cas avec les groupes mais parfois les manipulations sont nettement moins évidentes.*

EXERCICE 1.2.2. **D 1**

Soit G un groupe fini de cardinal n. Montrer qu'il existe une partie génératrice de G de cardinal au plus $\log_2 n$.

Commentaires : *c'est un exercice posé il y a longtemps à l'oral de Centrale. Je ne l'ai pas vu reposé depuis pourtant il m'a semblé intéressant.*

EXERCICE 1.2.3. **I 1**

Soit G un groupe et $\mathbb{K}$ un corps, $(f_1, \ldots, f_n)$ n morphismes distincts de G dans $\mathbb{K}$ ($n \geqslant 1$).
On pose $\mathcal{A} = \{\text{applications de } G \text{ dans } \mathbb{K}\}$ qui est un espace vectoriel.
Montrer que $(f_1, \ldots, f_n)$ est libre.

Commentaires : *question posée à l'oral des Mines. La solution n'est pas immédiate et mérite réflexion.*

EXERCICE 1.2.4. **I 1**

Soit G un groupe, on pose $Z_0(G) = \{e\}$ et

$$Z_n(G) = \{x \in G \mid \forall y \in G,\ x^{-1}y^{-1}xy \in Z_{n-1}(G)\}.$$

Montrer que $(Z_n(G))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de sous-groupes de G.

Commentaires : *comme toujours avec les groupes, le nombre de propriétés à utiliser est très limité mais cela n'enlève rien à la difficulté !*