

Table des matières

Avant-propos	v
Notations	xii
Chapitre I. GÉNÉRALITÉS : ANNEAUX, CORPS, POLYNÔMES	1
1 Anneaux et corps	1
2 Caractéristique d'un anneau, d'un corps	6
3 Polynômes irréductibles	8
4 Polynômes symétriques	12
5 Appendice : fonction indicatrice d'Euler	18
6 Exercices	19
Chapitre II. EXTENSIONS DE CORPS	21
1 Généralités	21
2 Groupe de Galois d'une extension	24
3 Exercices	28
Chapitre III. EXTENSIONS ALGÈBRIQUES ET TRANSCENDANTES	30
1 Structure des extensions monogènes	30
2 Eléments conjugués	35
3 Extensions algébriques	37
4 Nombres algébriques réels, complexes	39
5 Théorèmes de Hermite et de Lindemann	41
6 Exercices	46
Chapitre IV. CONSTRUCTIONS GÉOMETRIQUES À LA RÈGLE ET AU COMPAS	47
1 Points constructibles	47
2 Nombres constructibles	49
3 Application des résultats précédents aux problèmes grecs classiques	52
4 Compléments	55
5 Exercices	56
Chapitre V. ADJONCTION DE RACINES	57
1 Corps de rupture d'un polynôme	57
2 Corps de décomposition d'un polynôme	59
3 Clôture algébrique d'un corps	62
4 Exercices	66
Chapitre VI. CORPS CYCLOTOMIQUES	67
1 Corps cyclotomiques. Polynômes cyclotomiques	67
2 Sous-corps réel de $\mathbb{Q}(\mathbb{U}_n)$	70
3 Construction de polygones réguliers à la règle et au compas	74
4 Appendice : quelques polynômes cyclotomiques	76
5 Exercices	79

Chapitre VII. CORPS FINIS	81
1 Structure de \mathbb{F}_p -e.v. Commutativité	81
2 Existence et unicité d'un corps de cardinal primaire	85
3 Groupe des automorphismes d'un corps fini	86
4 Polynômes irréductibles sur \mathbb{F}_p	87
5 Sous-corps d'un corps fini	91
6 Clôture algébrique d'un corps fini	92
7 Carrés dans un corps fini	93
8 Exercices	95
Chapitre VIII. EXTENSIONS SÉPARABLES	97
1 Préliminaires	97
2 Polynômes séparables	98
3 Eléments séparables. Extensions séparables	99
4 Degré séparable d'une extension algébrique	102
5 Exercices	104
Chapitre IX. TRACE, NORME, DISCRIMINANT	106
1 Rappels d'algèbre linéaire	106
2 Définitions et propriétés élémentaires	107
3 Transitivité de la norme et de la trace : complément	112
4 Discriminant	113
5 Discriminant d'un polynôme	115
6 Résultant, déterminant de Sylvester, discriminant	118
7 Exercices	124
Chapitre X. EXTENSIONS NORMALES	126
1 Résultats et concepts fondamentaux	126
2 Extensions normales finies et corps de décomposition	127
3 Normalité dans les tours d'extensions	128
4 Clôture normale d'une extension algébrique	129
5 Exercices	131
Chapitre XI. THÉORIE DE GALOIS DES EXTENSIONS FINIES	132
1 Extensions galoisiennes finies	132
2 Correspondance de Galois	135
3 Groupe de Galois d'un polynôme	138
4 Applications et exemples	140
5 Exercices	150

Chapitre XII. RACINES DE L'UNITÉ	152
1 Corps des racines n -ièmes de l'unité	152
2 Résidus quadratiques. Loi de réciprocité quadratique	155
3 Exercices	158
Chapitre XIII. NOTIONS DE THÉORIE DES GROUPES	159
1 Suites normales, suites de composition	159
2 Suite dérivée d'un groupe	160
3 Groupes résolubles	161
4 Groupes simples. Applications	162
5 Groupes symétriques	164
6 Sous-groupes de Sylow	167
7 Exercices	170
Chapitre XIV. ÉQUATIONS RÉSOUBLES PAR RADICAUX	171
1 Extensions galoisiennes finies à groupe de Galois cyclique	171
2 Extensions par radicaux	174
3 Exemples d'équations non résolubles par radicaux	177
4 Exercices	178
Chapitre XV. DEGRÉ DE TRANSCENDANCE	180
1 Dépendance algébrique	180
2 Degré de transcendance	184
3 Théorème de Lüroth	186
4 Exercices	189
Chapitre XVI. LE POLYNÔME GÉNÉRIQUE DE DEGRÉ n	190
1 Le polynôme générique de degré n	190
2 Résolution des équations algébriques de degré ≤ 4	192
3 Exercices	196
Chapitre XVII. COMPLÉMENTS	197
1 Caractérisation des nombres constructibles	197
2 Une démonstration du théorème de D'Alembert-Gauss	198
3 Théorème de Stickelberger	199
4 Bases normales d'un corps fini	201
5 Groupe de Galois d'un polynôme de degré 4	203
6 Réduction modulo p	204
Chapitre XVIII. PROLONGEMENTS	207
1 Théorie de Galois constructive	207
2 Généralisations de la théorie de Galois classique	209
3 Théorie de Galois différentielle	210
4 Bibliographie additionnelle	212
Chapitre XIX. EXERCICES CORRIGES	213
Bibliographie.	280
Index terminologique.	282