Chapitre 1

Espaces vectoriels et applications linéaires

Les espaces vectoriels ont été introduits par **Cayley** et **Grassmann** au milieu du XIX[e] siècle. Cependant, le premier ne proposait qu'un calcul sur des n-uplets et la formalisation du second était des plus obscures. Ce fut l'œuvre de Giuseppe **Peano** de déchiffrer le travail du mathématicien allemand et de donner le premier, en 1888, une définition satisfaisante d'un espace vectoriel. Il introduisit les applications linéaires et montra que cette théorie ne se réduit pas à la dimension finie en citant l'exemple des polynômes. Giuseppe Peano est aussi connu pour son axiomatique des entiers naturels et pour avoir construit une courbe remplissant un carré. On lui doit d'astucieux contre-exemples qui ont remis en cause des assertions qui semblaient pourtant bien établies.

Giuseppe Peano
1858-1932

Objectifs

Les incontournables

- Revoir et enrichir les notions élémentaires concernant les espaces vectoriels : famille libre, famille génératrice, base, dimension, rang
- Revoir et enrichir les notions élémentaires concernant les applications linéaires
- Découvrir le produit d'espaces vectoriels et étendre les notions de somme et de somme directe de sous-espaces vectoriels
- Vérifier sa capacité à déterminer le rang d'une famille de vecteurs ou d'une application linéaire et à utiliser le théorème du rang
- Découvrir la notion de sous-espace vectoriel stable par un endomorphisme et la notion d'endomorphisme induit sur un sous-espace vectoriel stable.

Et plus si affinités…

- Savoir démontrer qu'une famille infinie de vecteurs est une base
- Approfondir les questions d'existence, en dimension finie, d'une base, d'un supplémentaire pour tout sous-espace vectoriel…

■■ Résumé de cours

$\mathbb{K}$ désigne indifféremment l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

■ Familles libres, familles génératrices, bases

Définition : Combinaison linéaire —. *On appelle **combinaison linéaire d'un nombre fini de vecteurs** $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de E toute somme $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$, où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sont des scalaires (des éléments de $\mathbb{K}$), appelés **coefficients** de la combinaison linéaire.*

Proposition 1.1.— Sous-espace vectoriel engendré par une famille —. L'ensemble des combinaisons linéaires finies d'une famille X de vecteurs est un sous-espace vectoriel de E, appelé ***sous-espace vectoriel engendré par*** X et noté $\operatorname{Vect}(X)$.

Remarque : $\operatorname{Vect}(X)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E, au sens de l'inclusion, contenant la famille X.

Définition : Famille libre, famille liée —. ▸ $(x_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$, *famille **finie** de vecteurs de E, est **libre** si, et seulement si, quelle que soit la famille $(\lambda_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \in \mathbb{K}^n$,*

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0_E \Rightarrow \forall\, i \in [\![1,n]\!],\ \lambda_i = 0.}$$

▸ $(x_i)_{i\in I}$, *famille de vecteurs de E de cardinal quelconque, est **libre** si, et seulement si, toutes ses sous-familles finies sont libres.*

▸ *Les x_i, $i \in I$, sont **linéairement indépendants** si, et seulement si, la famille $(x_i)_{i\in I}$ est libre.*

▸ *Si une famille n'est pas libre, on dit qu'elle est **liée**.*

Propriétés : ▹ Toute famille contenue dans une famille libre est libre.
▹ Toute famille contenant une famille liée est liée (contraposition de l'implication précédente). En particulier, toute famille contenant le vecteur nul est liée.

Exemple : Si $\deg(P_0) < \deg(P_1) < \cdots < \deg(P_n)$, la famille finie de polynômes non nuls à coefficients dans $\mathbb{K}$, $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$, est dite de degrés échelonnés. Une telle famille est libre.

Proposition 1.2.— Famille liée et combinaison linéaire —. Une famille $(x_i)_{i\in I}$ est liée si, et seulement si, l'un au moins des x_i est combinaison linéaire des autres.

(x_1, x_2) est liée si, et seulement si, il existe un scalaire λ tel que : $x_1 = \lambda\, x_2$ ou $x_2 = \lambda\, x_1$, et on dit alors que x_1 et x_2 sont ***colinéaires***.
(x_1, x_2, x_3) est liée si, et seulement si, il existe deux scalaires λ et μ tels que : $x_1 = \lambda\, x_2 + \mu\, x_3$ ou $x_2 = \lambda\, x_1 + \mu\, x_3$ ou $x_3 = \lambda\, x_1 + \mu\, x_2$, et on dit alors que x_1, x_2 et x_3 sont ***coplanaires***.

Définition : Famille génératrice —. *Une famille X de vecteurs de E est une **famille génératrice** de E si, et seulement si, tout vecteur de E est combinaison linéaire d'une sous-famille finie de vecteurs de X.*

Définition : Base —. *Une famille de vecteurs du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E en est une* **base** *si, et seulement si, elle est une famille libre et génératrice.*

Exemples : ▷ $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$. $(X^i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

▷ $\big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Ces bases sont les plus simples de chacun de ces espaces vectoriels : on dit que ce sont leurs **bases canoniques** respectives.

Proposition 1.3.— Coordonnées d'un vecteur dans une base —. Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ une base de E. Pour tout vecteur x de E, il existe un n-uplet unique $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ de $\mathbb{K}^n$ tel que :

$$\boxed{x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, e_i.}$$

$(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ est le ***n-uplet des coordonnées du vecteur x dans la base $\mathscr{B}$*** et $\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}$ est la ***matrice colonne des coordonnées du vecteur x dans la base $\mathscr{B}$***.

Exemple : Les coordonnées d'un polynôme de degré inférieur ou égal à n dans la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$ sont ses coefficients.

■ Dimension

Définition : Espace vectoriel de dimension finie —. *Un espace vectoriel est* ***de dimension finie*** *si, et seulement si, il admet une famille génératrice finie.*

Proposition 1.4.— Théorèmes de la base extraite et de la base incomplète —. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul de dimension finie.
De toute famille génératrice de E, on peut extraire une base de E ; par conséquent, E admet une base finie.
Toute famille libre de E peut être complétée en une base de E.

Lemme 1.5.— Dans un espace vectoriel engendré par n vecteurs, toute famille de $n+1$ vecteurs est liée.

Théorème-Définition 1.6.— Théorème de la dimension —. Toutes les bases d'un espace vectoriel E de dimension finie ont le même nombre d'éléments, appelé ***dimension de*** E et noté $\dim E$.
Par convention, la dimension de $\{0_E\}$ est 0.

Proposition 1.7.— Si $\dim E = n$ et si $\mathcal{F}$ est une famille de n vecteurs de E, alors il y a équivalence entre :
(1) $\mathcal{F}$ est une base de E (2) $\mathcal{F}$ est une famille libre (3) $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de E.

Définition : Rang d'une famille finie de vecteurs —. *Le* ***rang d'une famille finie*** $\mathcal{F}$ ***de vecteurs*** *est la dimension du sous-espace vectoriel engendré par cette famille. On le note* $\operatorname{rg}\mathcal{F}$.

Proposition 1.8.— Une famille finie de vecteurs est libre si, et seulement si, son cardinal est égal à son rang.

■ Produit, somme et somme directe d'espaces vectoriels

Produit d'espaces vectoriels

Définition : Produit cartésien —. *Le produit cartésien de deux ensembles* A *et* B *est l'ensemble, noté* $A \times B$*, défini par :*

$$\boxed{A \times B = \{(u,v) \,|\, u \in A \text{ et } v \in B\}}.$$

Le produit cartésien de n *ensembles* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *est l'ensemble, noté* $\prod_{i=1}^{n} A_i$ *défini par :*

$$\boxed{\prod_{i=1}^{n} A_i = \{(u_1, u_2, \ldots, u_n) \,|\, \forall\, i \in [\![1,n]\!],\ u_i \in A_i\}}.$$

Soit $(E,+,.)$ et $(F,\hat{+},\hat{.})$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels :

Théorème-Définition 1.9.— Produit de deux sous-espaces vectoriels —.

Si on pose : $\begin{cases} \forall\,(u,v) \in E \times F,\ \forall\,(u',v') \in E \times F,\ (u,v)\check{+}(u',v') = (u+v, u'\hat{+}v') \\ \forall\,(u,v) \in E \times F,\ \forall\,\lambda \in \mathbb{K},\ \lambda\check{.}(u,v) = (\lambda.u, \lambda\hat{.}v) \end{cases}$,

alors $(E \times F, \check{+}, \check{.})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, dit ***espace vectoriel produit de*** E ***et*** F.

Proposition 1.10.— Dimension du produit de deux espaces vectoriels —. Si E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives n et p, alors $E \times F$ est de dimension $n+p$.

Soit $(E_1, E_2, \ldots, E_p)$ une famille finie de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On suppose, pour simplifier, que sur chaque E_i, l'addition et la multiplication externe sont notées par les mêmes symboles : $+$ pour l'addition et la simple juxtaposition pour la multiplication externe.

Théorème-Définition 1.11.— Produit de p sous-espaces vectoriels —.

Si : $\begin{cases} \forall\,(u_i)_{i\in[\![1,p]\!]} \in \prod_{i=1}^{p} E_i,\ \forall\,(u'_i)_{i\in[\![1,p]\!]} \in \prod_{i=1}^{p} E_i,\ (u_i)_{i\in[\![1,p]\!]} + (u'_i)_{i\in[\![1,p]\!]} = (u_i + u'_i)_{i\in[\![1,p]\!]} \\ \forall\,(u_i)_{i\in[\![1,p]\!]} \in \prod_{i=1}^{p} E_i,\ \forall\,\lambda \in \mathbb{K},\ \lambda\,(u_i)_{i\in[\![1,p]\!]} = (\lambda\,u_i)_{i\in[\![1,p]\!]} \end{cases}$

alors $\left(\prod_{i=1}^{p} E_i, +, .\right)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, dit ***espace vectoriel produit des*** E_i.

Proposition 1.12.— Dimension du produit de p espaces vectoriels —. Si $(E_1, E_2, \ldots, E_p)$ est une famille de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives $n_1, n_2, \ldots, n_p$, alors

$$\dim\left(\prod_{i=1}^{p} E_i\right) = \sum_{i=1}^{p} n_i.$$

Somme de sous-espaces vectoriels

Théorème-Définition 1.13.— Somme —. Soit $(E_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une famille finie de sous-espaces vectoriels de E, $\left\{\sum_{i=1}^{n} x_i,\ \text{ où, } \forall\, i \in [\![1,n]\!],\, x_i \in E_i\right\}$ est un sous-espace vectoriel de E.

Il est noté $\sum_{i=1}^{n} E_i$ et c'est **la somme des sous-espaces vectoriels** $(E_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$.

Somme directe de sous-espaces vectoriels

Définition : Somme directe —. ***La somme des sous-espaces vectoriels de la famille*** $(E_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ ***est directe*** *si, et seulement si, tout vecteur* x *de* $\sum_{i=1}^{n} E_i$ *se décompose* ***de manière unique*** *sous la forme :* $x = \sum_{i=1}^{n} x_i$, *où* $(x_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \in E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$.

Dans ce cas là, on note la somme de ces sous-espaces vectoriels : $\bigoplus_{i=1}^{n} E_i$.

Proposition 1.14.— Caractérisation d'une somme directe —. La somme des sous-espaces vectoriels de la famille $(E_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est directe si, et seulement si,

$$\boxed{\forall\,(x_1,x_2,\cdots,x_n) \in E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n,\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i = 0_E \Rightarrow \forall\, i \in [\![1,n]\!],\, x_i = 0_E\right).}$$

Commentaire : La somme de deux sous-espaces vectoriels de E est directe si, et seulement si, leur intersection est réduite à $\{0_E\}$.
En revanche, si $n \geqslant 3$, il ne suffit pas que les intersections deux à deux des E_i soient réduites à $\{0_E\}$, pour que la somme des E_i soit directe.

Définition : Sous-espaces vectoriels supplémentaires —. *Deux sous-espaces vectoriels* F *et* G *de* E *sont* ***supplémentaires dans*** E *si, et seulement si, leur somme est directe et égale à* E, *autrement dit, lorsque :* $E = F \oplus G$.

Théorème-Définition 1.15.— Base adaptée à un sous-espace vectoriel —. Si $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ est une base d'un sous-espace vectoriel F d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n, alors il existe une base de E de la forme $(e_1, e_2, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n)$.
Une telle base est une ***base de*** E ***adaptée au sous-espace vectoriel*** F.

Commentaire : Il en découle, qu'en dimension finie, tout sous-espace vectoriel admet un supplémentaire, puisque $\mathrm{Vect}\,(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ est un sous-espace vectoriel supplémentaire de F dans E.

Proposition 1.16.— Les sous-espaces vectoriels $(E_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ de E constituent une décomposition en somme directe de E si, et seulement si, $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$, ou, ce qui est équivalent :

$$\boxed{\forall\, x \in E,\ \exists!(x_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \in E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n \text{ tel que } x = \sum_{i=1}^{n} x_i.}$$

Proposition 1.17.— Décomposition en somme directe en fractionnant une base —. Si on fractionne une base $(e_1, e_2, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n)$ de E, on obtient :

$$E = \operatorname{Vect}(e_1, e_2, \ldots, e_p) \oplus \operatorname{Vect}(e_{p+1}, \ldots, e_n).$$

Plus généralement, si on fractionne une base $\mathscr{B}$ de E en une partition $(\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2, \ldots, \mathscr{B}_k)$, alors

$$E = \bigoplus_{i=1}^{k} \operatorname{Vect}(\mathscr{B}_i).$$

Réciproquement :

Théorème-Définition 1.18.— Base adaptée à une décomposition en somme directe —. $(E_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ est une famille de n sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie, les $\mathscr{B}_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, sont des bases respectives des E_i, $1 \leqslant i \leqslant n$ et $\mathscr{B}$ est la famille obtenue en juxtaposant (on dit aussi « en concaténant ») les vecteurs des familles $\mathscr{B}_i$.

Si la somme des $(E_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ est directe, alors $\mathscr{B}$ est une base de $\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{n} E_i$. Si $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{n} E_i$, alors $\mathscr{B}$ est une base de E dite ***base adaptée à cette décomposition.***

■ Sous-espaces-vectoriels en dimension finie

Proposition 1.19.— Tout sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel de dimension finie E est de dimension finie et $\dim F \leqslant \dim E$.
De plus, si $\dim F = \dim E$, alors $F = E$.

Proposition 1.20.— Caractérisation d'une somme directe par les dimensions —. Si $E_1, E_2, \ldots, E_p$ sont des sous-espaces de dimension finie, alors :

$$\boxed{\dim\left(\sum_{i=1}^{p} E_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \dim E_i}$$

avec égalité si, et seulement si, la somme est directe.

Corollaire 1.21.— Décomposition en somme directe en dimension finie —. En dimension finie, $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{n} E_i$ si, et seulement si, **deux des trois** propositions suivantes sont vérifiées :

(i) $E = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} E_i$; **(ii)** $\dim E = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dim E_i$; **(iii)** la somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} E_i$ est directe.

Corollaire 1.22.— Dimension de la somme de deux sous-espaces vectoriels —. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie E :

$$\boxed{\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).}$$

■ Applications linéaires

E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Définition : *Une application u de E dans F est dite **linéaire** si elle vérifie :*
$$\forall (x,y) \in E \times F,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ u(\lambda x + y) = \lambda u(x) + u(y).$$

Notations et vocabulaire : ▷ On note $\mathscr{L}(E,F)$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des applications linéaires de E dans F. Lorsque E et F sont de dimensions finies, $\dim \mathscr{L}(E,F) = \dim E \times \dim F$.
▷ Une application linéaire de E dans E est un ***endomorphisme*** de E. Leur ensemble est l'espace vectoriel $\mathscr{L}(E)$.
▷ Une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$ est une ***forme linéaire*** sur E.
▷ Une application linéaire de E dans F bijective est un ***isomorphisme*** de E dans F. Un endomorphisme de E bijectif est un ***automorphisme*** de E. L'ensemble des automorphismes de E est noté $\mathrm{GL}(E)$ et appelé ***groupe linéaire de*** E.
▷ Deux espaces vectoriels sont ***isomorphes*** si, et seulement si, il existe un isomorphisme de l'un dans l'autre.

Proposition 1.23.— Détermination d'une application linéaire par l'image d'une base —. Étant donné deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E et F et une base $(e_1, e_2, \cdots, e_p)$ de E, une application linéaire u de E dans F est entièrement déterminée par la donnée des $u(e_j)$, pour $j \in [\![1,p]\!]$.

Proposition 1.24.— Application linéaire et supplémentaires —. Une application linéaire définie sur $E = E_1 \oplus E_2$ est entièrement déterminée par ses restrictions à E_1 et E_2.

■ Sous-espaces stables

Définition : *Un sous-espace vectoriel F de E est **stable par un endomorphisme** u **de** E lorsque*
$$\boxed{u(F) \subset F}.$$
Dans ce cas, l'application $\hat{u}$ définie par : $\left\{\begin{array}{ccc} F & \to & F \\ x & \mapsto & \hat{u}(x) = u(x) \end{array}\right.$ *est **l'endomorphisme de** F **induit par** u.*

■ Noyau, image

Théorème-Définition 1.25.— Noyau d'une application linéaire —. Si $u \in \mathscr{L}(E,F)$, l'ensemble $\{x \in E \,|\, u(x) = 0_F\}$ est un sous-espace vectoriel de E appelé ***noyau de*** u et noté $\mathrm{Ker}\, u$.
$u \in \mathscr{L}(E,F)$ est injective si, et seulement si, son noyau est réduit à $\{0_E\}$.

L'image d'une famille libre par une application linéaire injective est une famille libre.

Théorème-Définition 1.26.— Image d'une application linéaire —. u étant une application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F, l'ensemble $\{u(x),\ x \in E\}$ est un sous-espace vectoriel de F appelé ***image de*** u et noté $\mathrm{Im}\, u$.
u est surjective si, et seulement si, $\mathrm{Im}\, u = F$.

L'image d'une famille génératrice par une application linéaire surjective est une famille génératrice.

Remarque : Si les endomorphismes u et v commutent, alors $\mathrm{Im}\, u$ et $\mathrm{Ker}\, u$ sont stables par v et, symétriquement, $\mathrm{Im}\, v$ et $\mathrm{Ker}\, v$ sont stables par u.