

Ce qui fonde la notion des vecteurs, c'est la possibilité, formalisée par les axiomes d'un espace vectoriel, de les superposer (CHAPITRE II). Une telle superposition peut être réalisée expérimentalement : deux ondes de même nature (deux ondes électromagnétiques ou deux ondes sonores, par exemple) qui se croisent dans l'espace-temps se superposent, engendrant des phénomènes d'interférence et de battement ; le champ électrostatique créé par deux charges électriques immobiles est la superposition des champs créés par chacune ; le courant circulant dans un circuit RLC alimenté par deux générateurs de tension montés en série est la superposition des courants engendrés par chaque générateur, etc. Un champ électromagnétique, un champ de pression, un champ électrostatique ou un courant électrique sont de ce point de vue des vecteurs : la possibilité de les superposer expérimentalement conduit théoriquement à modéliser chacun d'eux par un vecteur, un élément d'un espace vectoriel, et à faire de ce vecteur l'inconnue d'une équation, une équation linéaire.

Énoncer un principe de superposition (CHAPITRE III), c'est regarder la linéarité de cette équation comme une symétrie, c'est démontrer un théorème d'invariance de l'ensemble des solutions de cette équation, qui résulte de sa linéarité. Dans sa version faible, un tel "principe" se contente de construire de nouvelles solutions par des superpositions *ad hoc* de solutions déjà connues. Le procédé peut se révéler très efficace : il permet de dresser un "dictionnaire" de solutions superposables (la méthode des images en électrostatique en fournit un exemple). Mais il ne garantit ni l'existence d'une solution, à moins de savoir la construire, ni l'unicité de cette solution. C'est dans sa version forte qu'un principe de superposition énoncera, sous certaines hypothèses, l'existence et l'unicité de la solution d'une équation linéaire. Toute solution s'écrira alors de manière unique comme une superposition de solutions élémentaires.

La linéarité est la conjonction de deux propriétés, la proportionnalité et l'additivité. Nous commencerons par les étudier au CHAPITRE I, ainsi que leur lien avec la continuité, le caractère extensif ou intensif d'une quantité, l'absence d'interaction ou de rétroaction dans un phénomène : pratiquement équivalentes en dimension un, proportionnalité et additivité ne le seront plus en dimension supérieure.

RÉFÉRENCES —	Statistique, droite des moindres carrés [2]
	Battements, interférences, polarisation [3, 4]
	Problème de Dirichlet [5, 6]
	Électromagnétisme, méthode des images [7]

CHAPITRE I

La proportionnalité

1. Mesurer une grandeur

1.1. Grandeurs mesurables. “Tout corps, plongé dans un liquide, subit une poussée verticale vers le haut. Cette poussée est égale au poids du volume d’eau déplacé.” Si la première partie de cet énoncé de la poussée d’Archimède est qualitative, la seconde est, elle, quantitative : elle affirme l’égalité de deux grandeurs de même espèce (ici, deux forces). Mesurer une grandeur physique, c’est passer du qualitatif au quantitatif. C’est par là-même faire entrer la physique dans la sphère des mathématiques et confronter l’expérience avec le formalisme.

D’une grandeur, on dit en physique qu’elle est mesurable si l’on sait en définir l’égalité et l’addition. L’exemple le plus simple est la mesure des longueurs :



FIG. 1. Comparaison et addition de deux longueurs

- deux longueurs AB et CD sont dites égales s’il est possible de superposer les segments $[AB]$ et $[CD]$;
- la somme $AB + CD$ de deux longueurs AB et CD est la longueur du segment $[AD] = [AB] \cup [CD]$ obtenu en mettant bout à bout les deux segments $[AB]$ et $[CD]$.

De même, pour les forces électromotrices (*fem*) e_1 et e_2 de deux générateurs, les comparerait-on en montant les deux générateurs en opposition et définirait-on leur somme en montant les générateurs en série.



FIG. 2. Comparaison et addition de deux *fem*

1.2. Le rapport de deux grandeurs. En notant $n \cdot AB$ la longueur $A_1B_1 + A_2B_2 + \dots + A_nB_n$ (où chaque longueur A_iB_i est égale à AB et $n \in \mathbb{N}$), on peut définir le rapport de deux longueurs par la relation :

$$\frac{AB}{CD} = \frac{p}{q} \iff p \cdot CD = q \cdot AB,$$

où $CD \neq 0$, $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.

Cette définition opératoire du rapport de deux longueurs vaut plus généralement pour le rapport de deux grandeurs mesurables de même espèce : à noter que ce rapport est un nombre (plus précisément un nombre rationnel ; nous reviendrons sur ce point au §4), alors que ces grandeurs ne le sont pas. Pour qu'elles le deviennent, il faut choisir une unité.

1.3. Grandeurs extensives ou intensives. Le rapport $\frac{L_1}{L_0}$ de deux longueurs est un nombre. Choisir une unité de longueur, c'est faire le choix d'une longueur L_0 à laquelle on attribue la valeur 1. Cette longueur L_0 est appelée un *étalon* de longueur. Son choix est conventionnel et permet de construire une *échelle* de longueur (autrement dit de graduer une règle). Dans cette échelle, chaque longueur L_1 s'identifie à un nombre (on dit aussi à un *scalaire*, de l'étymologie *scala* : échelle) :

$$L_1 = \frac{p}{q} \iff p \cdot L_0 = q \cdot L_1.$$

Il est plus ou moins aisé d'étendre ce processus de la mesure à des grandeurs d'autres espèces : ainsi des surfaces, des volumes, des masses ; des forces en statique ; de l'intensité d'un courant ou de la tension aux bornes d'un dipôle en électricité. Ce sont toutes là, comme les longueurs, des grandeurs f extensives, c'est-à-dire vérifiant pour deux systèmes physiques A et B la propriété

$$f(A \cup B) = f(A) + f(B) \text{ si } A \cap B = \emptyset.$$

Et cette relation suffit à expliquer qu'il soit aisé de définir expérimentalement l'addition de deux grandeurs extensives, et donc de les rendre mesurables. Pour d'autres types de grandeurs, la mesure est plus délicate. C'est ainsi que, pour mesurer une grandeur f intensive, qui vérifie la propriété

$$f(A \cup B) = f(A) = f(B) \text{ si } f(A) = f(B),$$

on passe par la mesure d'une grandeur d'une autre espèce, qui soit extensive et en bijection avec elle.

Examinons deux appareils de mesure (figure 3) : un dynamomètre mesurant une force F (extensive) et un thermomètre mesurant une température θ (intensive). Dans les deux cas, on passe par la mesure d'une longueur (la longueur ℓ du ressort du dynamomètre, la hauteur h de la colonne de mercure du thermomètre), néanmoins les deux processus de mesure sont radicalement différents :

– l'égalité et la somme de deux forces sont définies en soi, le dynamomètre ne les définit pas mais utilise la loi de Hooke, $F(\ell - \ell_0) = k \cdot (\ell - \ell_0)$ (où k

est la raideur du ressort et ℓ_0 sa longueur à vide) pour convertir une force en une longueur ;

– le thermomètre, au contraire, utilise la propriété selon laquelle un corps (ici le mercure) chauffé se dilate pour *définir* une échelle de température centigrade par la relation $\theta(h) = 100 \frac{h-h_0}{h_{100}-h_0}$ (de sorte que 0 est la température du mélange glace-eau et 100 celle du mélange eau-vapeur sous la pression atmosphérique).



FIG. 3

2. Proportionnalité et additivité

2.1. DÉFINITION — Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est proportionnelle si

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x).$$

L'échelle de température centigrade $\theta(h - h_0) = 100 \frac{h-h_0}{h_{100}-h_0}$ en calorimétrie, la loi de Hooke $F(\ell - \ell_0) = k \cdot (\ell - \ell_0)$ en statique fournissent des exemples de fonctions proportionnelles. Il en est d'autres : le poids est proportionnel à la masse ($P = mg$), la tension aux bornes d'une résistance est proportionnelle au courant électrique qui la traverse (la loi d'Ohm $U = RI$). Chaque exemple fait apparaître un *coefficient de proportionnalité* (respectivement $\frac{100}{h_{100}-h_0}$, la raideur k , l'intensité de la pesanteur g , la résistance R) défini par la proposition suivante.

PROPOSITION — Si une fonction f est proportionnelle, alors il existe un réel K , appelé coefficient de proportionnalité, tel que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = K \cdot x$.

◁ En notant $K = f(1)$, il vient : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(x \cdot 1) = x \cdot f(1) = K \cdot x$.—

Il existe un lien entre fonctions proportionnelles et grandeurs extensives : en suspendant deux masses à un dynamomètre, on constate que la réunion des masses engendre la somme des allongements du ressort.

DÉFINITION — Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est additive si

$$\forall x_1 \in \mathbb{R}, \forall x_2 \in \mathbb{R}, f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2).$$

PROPOSITION — Si une fonction f est proportionnelle, alors elle est additive.

◁ $f(x_1 + x_2) = K \cdot (x_1 + x_2) = K \cdot x_1 + K \cdot x_2$. La réciproque est vraie dans \mathbb{Q} ; elle est vraie dans \mathbb{R} si f est continue, comme nous le verrons au §4. —

2.2. Résistances électriques. Testons par exemple la relation entre la résistance R , la conductivité γ , la longueur ℓ et la section S d'une résistance cylindrique : $R = \frac{\ell}{\gamma \cdot S}$.

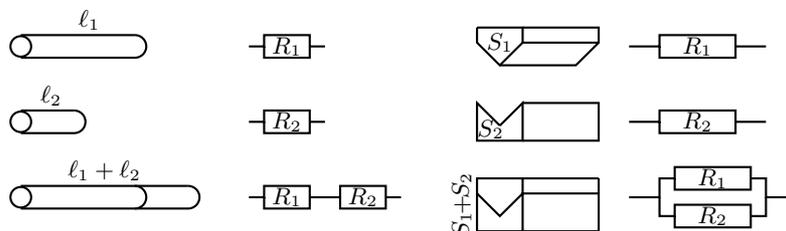


FIG. 4. Résistances en série et en parallèle

La résistance est proportionnelle à la longueur. En montant en série deux résistances $R_1 = \frac{\ell_1}{\gamma \cdot S}$ et $R_2 = \frac{\ell_2}{\gamma \cdot S}$, on obtient une résistance de longueur $\ell_1 + \ell_2$: $R = \frac{\ell_1 + \ell_2}{\gamma \cdot S} = R_1 + R_2$. La résistance est une fonction additive de la longueur ; ceci est compatible avec la propriété suivante : deux résistances montées en série s'ajoutent.

La conductance $\frac{1}{R} = \frac{\gamma \cdot S}{\ell}$ est proportionnelle à la section S . En montant en parallèle deux résistances $R_1 = \frac{\ell}{\gamma \cdot S_1}$ et $R_2 = \frac{\ell}{\gamma \cdot S_2}$, on obtient une résistance de section $S_1 + S_2$: $\frac{1}{R} = \frac{\gamma \cdot (S_1 + S_2)}{\ell} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$. La conductance est une fonction additive de la section ; ceci est compatible avec la propriété suivante : les inverses de deux résistances montées en parallèles s'ajoutent.

2.3. Gaz parfaits. L'équation d'état de n moles de gaz parfait s'écrit $P\dot{V} = nRT$. Elle est équivalente à deux quelconques des lois suivantes :

(i) (*loi de Mariotte*) Lors d'une transformation isotherme, le pression P d'une quantité donnée de gaz parfait est inversement proportionnelle à son volume V .

(ii) (*loi de Gay-Lussac*) Lors d'une transformation isobare, le volume V d'une quantité donnée de gaz parfait est proportionnel à sa température T .

(iii) (*loi de Charles*) Lors d'une transformation isochore, la pression P d'une quantité donnée de gaz parfait est proportionnelle à sa température T .

$\triangleleft (i) \iff P \cdot V = \alpha(T)$, $(ii) \iff V = \beta(P) \cdot T$ et $(iii) \iff P = \gamma(V) \cdot T$.

De (ii) et (iii), on tire que $P \cdot V = P \cdot \beta(P) \cdot T = V \cdot \gamma(V) \cdot T$. D'où $P \cdot \beta(P) = V \cdot \gamma(V)$ est une constante k et par suite $P \cdot V = k \cdot T$. Réciproquement, cette équation implique (ii) et (iii). Les autres équivalences se démontrent de même.

Le volume étant une quantité extensive et les température et pression intensives, la constante k est extensive. Elle s'écrit $k = n \cdot R$, la constante

de proportionnalité R étant alors une quantité intensive. C'est une constante en ce sens qu'elle ne dépend d'aucune des variables d'état P , T ou V . C'est aussi une constante *universelle* ("la constante des gaz parfaits" qui vaut $R = 8,3144 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$) en ce sens qu'elle ne dépend pas de la nature chimique du gaz. C'est ce qu'énonce la *loi d'Avogadro* : des volumes égaux d'un gaz quelconque, sous la même pression et à la même température, contiennent le même nombre de moles. —

La loi des gaz parfaits équivaut ainsi à deux lois de proportionnalité. Elle implique donc des lois d'additivité telles que la *loi de Dalton* : la pression P d'un mélange de deux gaz est la somme de leurs pressions partielles (chaque pression partielle P_1 ou P_2 étant par définition la pression qu'aurait chacun des gaz mélangés s'il occupait seul le volume V du mélange, à la même température T).

◁ Les nombres de moles s'ajoutent ($n = n_1 + n_2$) et vérifient chacun les équations $PV = nRT$, $P_1V = n_1RT$ et $P_2V = n_2RT$. Donc $P = P_1 + P_2$. —

2.4. Additivité et interaction. La loi de Dalton vaut sous l'hypothèse que les gaz mélangés tout comme le mélange sont parfaits mais aussi sous l'hypothèse que les nombres de moles s'ajoutent. C'est le cas si le mélange n'engendre pas de réaction chimique. Ceci est un exemple parmi d'autres où *l'additivité en physique résulte d'une absence d'interaction*. Il en est ainsi, comme nous le verrons plus loin (§XII.2.1), du pouvoir rotatoire d'un mélange ou encore de ce dernier exemple : deux charges électriques q_1 et q_2 immobiles dans un potentiel électrostatique V ont pour énergie $E = q_1 \cdot V(\vec{x}_1) + q_2 \cdot V(\vec{x}_2) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 \cdot q_2}{\|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\|} \neq E_1 + E_2$. À la somme des énergies $E_1 = q_1 \cdot V(\vec{x}_1)$ et $E_2 = q_2 \cdot V(\vec{x}_2)$ de chaque charge s'ajoute un troisième terme dû à leur interaction.

3. La droite des moindres carrés

3.1. Il n'y a pas de pertinence à tester expérimentalement la proportionnalité entre température et hauteur de la colonne de mercure dans un thermomètre : elle est conventionnelle. Mais il y en a une à tester la proportionnalité de la loi d'Ohm $U(I) = R \cdot I$, de la loi de Hooke $F(\ell - \ell_0) = k \cdot (\ell - \ell_0)$ ou du poids à la masse car :

– ce sont des lois expérimentales, la loi d'Ohm et la loi de Hooke ont de plus un domaine de validité limité, elles sont d'autant moins bien vérifiées que les valeurs de F ou U sont grandes ;

– l'expérience permet de mesurer le coefficient de proportionnalité (une résistance R dépend du matériel et de la température, la pesanteur g dépend du lieu, etc).

Sur un relevé de points expérimentaux, l'indice d'une relation de proportionnalité entre deux grandeurs mesurées sera un "presque-alignement" des points expérimentaux. Ceci motive deux questions : comment mesurer ce "presque", c'est-à-dire l'écart à un alignement parfait ? Comment déterminer la (une ?) meilleure droite, c'est-à-dire celle qui minimise cet écart ? Cette droite est la

droite des moindres carrés, dont nous allons établir l'existence (et l'unicité). Sa pente mesure le coefficient de proportionnalité.

3.2. Soient, dans le plan \mathbb{R}^2 , n points $M_i = (x_i, y_i)$ ($i = 1$ à n , où n est un entier strictement supérieur à 1) qui forment un "nuage" de points expérimentaux.

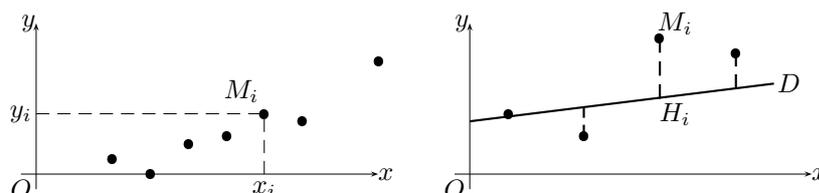


FIG. 5. Droite des moindres carrés

Soit D une droite d'équation $y = ax + b$. Notons H_i le projeté de chaque point M_i sur la droite D parallèlement à l'axe des y et formons la quantité

$$\delta(a, b) = \sum_{i=1}^n M_i H_i^2 : \text{elle mesure l'écart du nuage de points à la droite } D.$$

Les coordonnées de H_i sont $(x_i, ax_i + b)$ et $\delta(a, b) = \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2$ est

donc une forme quadratique en a et b que l'on peut réduire sous la forme d'une somme de carrés. Le calcul donne (en isolant d'abord les termes en b^2 dans la première parenthèse, en complétant ensuite les termes en a^2 dans la deuxième, en ajoutant enfin les termes constants dans la troisième) :

$$\delta(a, b) = n \left[(\bar{y} - a\bar{x} - b)^2 + \frac{1}{\sigma_x^2} (a\sigma_x^2 - \sigma_{xy})^2 + \left(\sigma_y^2 - \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_x^2} \right) \right].$$

Cette expression fait apparaître les cinq quantités

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i, \\ \sigma_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2, \quad \sigma_y^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2 - \bar{y}^2 \quad \text{et} \quad \sigma_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{x}\bar{y}$$

dont l'interprétation statistique est la suivante : \bar{x} et \bar{y} sont des moyennes ; σ_x^2 et σ_y^2 des variances ; σ_{xy} la covariance du nuage de points.

Enfin cette expression de l'écart $\delta(a, b)$ montre qu'il possède un minimum atteint quand les carrés des deux premières parenthèses sont nuls, ce qui fournit la réponse au problème des moindres carrés :

PROPOSITION — *Il existe une unique droite dont l'équation $y = ax + b$, don-*

née par $a = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}$ et $b = \bar{y} - a\bar{x}$, rend minimale l'écart $\delta(a, b) = \sum_{i=1}^n M_i H_i^2$.

Le minimum de cet écart vaut $n \left(\sigma_y^2 - \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_x^2} \right)$. Il est positif; il est nul *ssi* tous les points du nuage sont alignés : on a alors $\sigma_{xy}^2 = \sigma_x^2 \cdot \sigma_y^2$. Pour mesurer la qualité de l'alignement des points du nuage, il est donc pertinent d'introduire la quantité $\rho^2 = \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_x^2 \sigma_y^2} \in [0, 1]$: elle est sans dimension et vaut 1 *ssi* tous les points du nuage sont alignés. La quantité $\rho = \sqrt{\rho^2}$ est appelée *coefficient de corrélation*.

3.3. Étudions par exemple les valeurs de la tension U mesurées aux bornes d'une résistance de carbone traversée par un courant I .

U(V)	0	1	2	3	4	5	6	7
I (A)	0	0,039	0,079	0,118	0,160	0,198	0,238	0,277
U/I		25,6	25,3	25,4	25,0	25,3	25,2	25,3

La caractéristique $U = f(I)$, tracée à partir du tableau, ferait apparaître que les points expérimentaux sont presque alignés. La droite des moindres carrés associée au nuage de ces 8 points a pour équation :

$$U = 25,201.I + 0,006.$$

Elle fournit une mesure de la résistance : $R = 25,2\Omega$. À noter que cette valeur ne coïncide pas avec la valeur moyenne des rapports U/I : le calcul des moindres carrés privilégie les points éloignés de l'origine. Quant à la qualité de l'alignement, elle est donnée par le coefficient de corrélation, proche de 1 : $\rho = 0,99997$. Cette résistance satisfait donc à la loi d'Ohm, du moins sur un intervalle $[0, I_{max}]$, où $I_{max} \geq 0,277A$.

3.4. Proportionnalité et rétroaction. Mais, au-delà d'une intensité I_{max} , la caractéristique d'une résistance de carbone s'incurve vers le bas : la résistance $R(I)$, définie comme le rapport U/I , est alors une fonction décroissante de I . Ceci est dû à l'effet Joule : la puissance dissipée sous forme de chaleur, RI^2 , provoque une élévation de température de la résistance. Or la résistivité du carbone est une fonction décroissante de la température. La résistance dépend ainsi implicitement de l'intensité I à travers la température. C'est donc un effet de *rétroaction* qui limite ici la proportionnalité (l'oscillateur de Van der Pol nous fournira au §IX.3 un autre exemple de rétroaction). Cet effet est sensible au-delà d'une certaine puissance maximale $P_{max} = RI_{max}^2$; cette valeur P_{max} fixe le domaine de validité de la loi d'Ohm : $[0, I_{max}]$. Que la résistance dépende de la température permet d'ailleurs, après étalonnage, d'utiliser certaines résistances (on dit "thermistances") comme des thermomètres.

4. Rationnels et réels

Le rapport de deux grandeurs mesurables, ainsi qu'il est défini au §1.2, est un nombre *rationnel*. Si cette définition est opératoire, elle semble néanmoins contradictoire avec la géométrie : le rapport π de la circonférence du cercle à son diamètre n'est pas rationnel.