Chapitre 1
■ Signaux harmoniques et propagation ■

Les ordres de grandeur utiles

Signaux acoustiques

perception de l'oreille humaine	20 Hz < f < 20 000 Hz
fréquence du La musical	440 Hz
fréquence des infrasons ; des ultrasons	f < 20 Hz ; f > 20 kHz
vitesse du son dans l'air à 20 °C	$c \approx 340$ m.s^{-1}
vitesse du son dans l'eau	$c \approx 1400$ m.s^{-1}
vitesse du son dans les solides	$c \approx 3000$ à 5000 m.s^{-1}

Signaux électromagnétiques

secteur domestique	f = 50 Hz ($\lambda = 6000$ km)
électrocinétique GBF en TP	$f < 100$ kHz ($\lambda > 3$ km)
ondes hertziennes pour radio FM	$f \approx 100$ MHz ($\lambda \approx 3$ m)
lumière et vision humaine	$f \approx 10^{14}$ à 10^{15} Hz ($0{,}4\ \mu\text{m} < \lambda < 0{,}8\ \mu\text{m}$)
infrarouge ; ultraviolet	$\lambda > 0{,}8\ \mu\text{m}$; $\lambda < 0{,}4\ \mu\text{m}$
célérité de la lumière dans le vide	$c \approx 3{,}0.10^8$ m.s^{-1}

Le cours d'abord

■ L'oscillateur harmonique

Un mobile de masse m au point M est accroché à un ressort d'axe horizontal Ox dirigé par un vecteur unitaire $\vec{u}_x$, dont la raideur est k et la longueur à vide l_0.

1. Faire un dessin. Lorsque la longueur du ressort est $l > l_0$, quelle est la force exercée par le ressort sur le mobile et quel est son sens ? Et si $l < l_0$? Réécrire l'expression de cette force en repérant le mobile par une abscisse x comptée à partir de sa position $l = l_0$.

2. Quand dit-on qu'un point matériel est à l'équilibre ? Comment, qualitativement, peut-on distinguer un état d'équilibre stable d'un état d'équilibre instable ? Donner un exemple simple dans chaque cas. Qu'en est-il pour le système étudié à la question précédente ?

3. Faire le bilan des forces s'exerçant sur la masse m. La force exercée par la tige sur m n'a pas de composante sur l'axe Ox, en l'absence de frottements. Quelles forces agissent suivant Ox ? Appliquer la seconde loi de Newton $\sum \vec{f} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a}(M)$ et donner son expression suivant Ox, on rappelle que suivant Ox :

$$ma_x = \frac{dp_x}{dt} = m\frac{d\dot{x}}{dt} = m\ddot{x}$$

$v_x = \dot{x}$ est la vitesse suivant Ox, dérivée de x par rapport à t, $\ddot{x}$ est la dérivée de $\dot{x}$ par rapport à t, dérivée seconde de x par rapport à t. L'équation obtenue est l'équation différentielle du mouvement de la masse sur la tige Ox.

4. Montrer que $x(t) = a\cos(\omega_0 t + \varphi)$ est solution de l'équation différentielle. Que vaut alors ω_0 ? Réécrire l'équation différentielle avec ω_0. Comment s'appelle ω_0 pour la fonction harmonique $x(t)$? Quelle est la période T_0 des oscillations ?
a et φ sont des constantes dont la valeur dépend des conditions initiales. Comment s'appelle a pour la fonction $x(t)$? et φ ?

5. Pour un système masse-ressort de mouvement $x(t) = a\cos(\omega_0 t + \varphi)$, calculer l'énergie cinétique $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ et l'énergie potentielle élastique $E_p = \frac{1}{2}kx^2$, puis vérifier que l'énergie mécanique $E_m = E_c + E_p$ de l'oscillateur est une constante du mouvement ; quelle est son expression ? Commenter.

■ Propagation d'un signal

6. Comment l'air en contact avec la membrane d'un haut-parleur qui vibre est-il perturbé ? Quelle est la grandeur physique qui traduit la perturbation sonore engendrée ?

7. Qu'appelle-t-on fréquence d'un signal sonore ? À quelle sensation physiologique est-elle associée ? Quelle sont les limites des fréquences audibles par l'oreille humaine ? Quelle est la fréquence du La musical ? Quelle est la gamme de fréquence de la parole ?

8. La corde vibrante est un autre exemple de support le long duquel peut se transmettre un signal mécanique ; visualiser la grandeur physique spatio-temporelle $u(x,t)$ qui traduit la perturbation. Quelles ressemblances et différences peut-on voir avec les signaux sonores ?

9. Un signal est écrit sous la forme $u(x,t) = f(t - x/c)$; que représente cette écriture ? Quelle est la signification et la dimension de c ? Qu'en est-il d'un signal écrit sous la forme $u(x,t) = g(t + x/c)$?

10. Une corde vibrante est excitée de manière sinusoïdale par un vibreur placé en $x = 0$ qui lui impose le mouvement transversal $u(0,t) = u_0 \cos(\omega t)$ de pulsation ω ; une onde progressive sinusoïdale se propage vers les x croissants ; quel est le signal $u(x,t)$? Représenter les deux courbes $u(x_0,t)$ où $x = x_0$ est fixé et $u(x,t_0)$ où $t = t_0$ est fixé et commenter en précisant ce que représente chacune de ces courbes.

11. Établir la relation entre la fréquence f, la longueur d'onde λ (terme à définir) et la célérité c des ondes sinusoïdales de la question précédente et commenter cette relation. Puis réécrire $u(x,t)$ à l'aide de T et de λ.

12. Si $u_1 = u_0 \cos(\omega t)$ et $u_2 = u_0 \cos(\omega t + \varphi)$, φ est l'avance de phase (algébrique) de $u_2(t)$ sur $u_1(t)$. Reprendre le signal de la question **10.**, $u(0,t) = u_0 \cos(\omega t)$, se propageant vers les x croissants avec une célérité c : $u(x,t) = u_0 \cos(\omega(t - x/c))$. Quel est le retard de phase de $u(x,t)$ sur $u(0,t)$? Interpréter graphiquement les retards de phase de $u(x,t)$ sur $u(0,t)$, pour $x = \dfrac{\lambda}{4}$, $x = \dfrac{\lambda}{2}$, $x = \dfrac{3\lambda}{4}$ et $x = \lambda$.

■ Interférences entre deux ondes mécaniques

13. Une fourche à deux extrémités vibre en frappant la surface de l'eau d'une cuve à onde en deux points S_1 et S_2 ; les vibrations produites en un point M de la surface par ces deux sources s'écrivent respectivement $u_1(M,t)$ et $u_2(M,t)$. Qu'appelle-t-on « principe de superposition » ? À quelle condition deux ondes de même nature peuvent-elle interférer ? Décrire précisément le phénomène observé à l'aide d'une figure même sommaire.

14. Les deux points sources S_1 et S_2 ont pour mouvement des oscillations sinusoïdales de même amplitude, de même fréquence et sont en en phase :

$$u_1(S_1,t) = u_2(S_2,t) = a\cos(\omega t)$$

Pourquoi les signaux arrivant en M sont-ils déphasés ? Calculer le déphasage $\varphi(M)$. Comment utiliser la représentation de Fresnel pour déterminer l'amplitude et la phase de l'onde résultante en M ?

15. Quelle sont les conditions d'interférences constructives ou destructives en M ? Interpréter les conditions obtenues à l'aide d'un schéma.

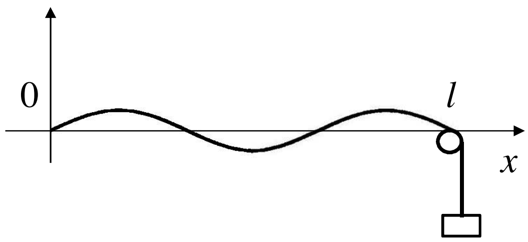
■ Ondes stationnaires

16. Sur une corde vibrante d'axe Ox, on superpose deux ondes sinusoïdales progressives, de même pulsation ω et de même amplitude a, mais se propageant en sens inverse à la même célérité c :

$$u_1(x,t) = a\cos(\omega(t - x/c)) \quad \text{et} \quad u_2(x,t) = a\cos(\omega(t + x/c))$$

Déterminer l'onde résultante $u(x,t)$. Pourquoi parle-t-on d'onde stationnaire ? En donner les caractéristiques (position des nœuds et des ventres).

17. Une corde de Melde de longueur finie l est excitée en $x=0$ par un vibreur (non représenté) de faible amplitude et de fréquence f variable, et passe en $x=l$ sur la gorge d'une poulie. Elle est tendue par une masse m accrochée à l'extrémité de la corde. Décrire le phénomène observé lorsqu'on modifie la fréquence d'excitation f. Quelles conditions aux limites peut-on traduire ? Exprimer la longueur l en fonction de la longueur d'onde λ_n du mode n concerné et en déduire les fréquences des modes propres en fonction de n, l et c. Représenter la corde dans le mode $n=3$.



18. Une corde de guitare de longueur l est fixée à ses deux extrémités ; le guitariste la met en vibration avec son doigt. Est-il possible de préciser dans quel état elle vibre ? Quel lien existe-t-il avec le spectre sonore émis par la corde ?

■ Diffraction à l'infini

19. De manière générale quand dit-on qu'il y a diffraction ?
Une fente fine de TP de hauteur $b \approx 2$ cm, de largeur $a \approx 0{,}1$ mm est éclairée sous incidence nulle par un faisceau lumineux de longueur d'onde $\lambda \approx 0{,}5$ µm. Faire un dessin et expliquer le phénomène observé. Dans quelle direction angulaire θ_0 est essentiellement envoyée la lumière ? Quelle est alors la largeur de la tache de diffraction sur un écran placé à une distance $D = 1$ m du plan de la fente ?

20. On reprend l'expérience avec une ouverture circulaire de diamètre d ; qu'observe-t-on ? Dans quelle direction angulaire θ_0 est essentiellement envoyée la lumière ? Quelle est l'importance pratique des ouvertures circulaires ?

■ Polarisation rectiligne de la lumière

21. Qu'est-ce qui distingue la grandeur physique qui caractérise la lumière par rapport à celles des ondes mécaniques ? Qu'appelle-t-on lumière naturelle ? Comment fonctionne un polariseur rectiligne ? Quel est son usage ? Établir la loi de Malus sachant que l'intensité lumineuse est proportionnelle au carré du champ électrique.

Conseils à suivre ☐ Erreurs à éviter

- ☐ Bien distinguer la longueur l du ressort, sa longueur l_0 à vide et son allongement $x = l - l_0$ qui est une grandeur algébrique.

- ☐ L'équation différentielle de la mécanique est du second ordre et son intégration conduit donc à l'introduction de deux constantes d'intégration (y penser !) ; leur détermination en vue d'obtenir une solution physique au problème suppose la connaissance de la vitesse initiale et de la position initiale du mobile étudié.

- ☐ Les grandeurs $u(x,t)$ qui représentent les phénomènes ondulatoires sont spatio-temporelles ; il convient donc de bien faire la distinction entre $u(x_0,t)$ qui, pour une corde vibrante par exemple, représente l'élongation d'un point x_0 de la corde en fonction du temps et $u(x,t_0)$ qui représente l'état de la corde entière à un instant t_0 fixé (comme une photographie).

- ☐ Dans l'écriture $u(x,t) = f(t - x/c)$ d'une onde progressive, bien distinguer $u(x,t)$ qui représente la grandeur physique (élongation, surpression,…) de f la fonction analytique (sinus, exponentielle,…) qui représente sa variation.

- ☐ Toutes les célérités sont notées c ; une erreur d'étourderie classique consiste à confondre dans les applications numériques $c = 340$ m.s^{-1} pour les ondes acoustiques avec $c = 3.10^8$ m.s^{-1} pour les ondes électromagnétiques.

- ☐ Ne pas confondre la célérité des ondes ($c = \sqrt{T/\mu}$ par exemple sur une corde) avec la vitesse de vibration d'un élément de corde.

- ☐ Dans les applications numériques il convient de ne pas oublier le coefficient 2π intervenant entre la pulsation $\omega = 2\pi f$ (en rad.s^{-1}) et la fréquence f (en Hz).

- ☐ La caractéristique essentielle d'une onde est sa fréquence (liée à la pulsation par $\omega = 2\pi f$) ; elle est conservée lorsque l'onde passe d'un milieu à un autre. En revanche, comme la célérité c change, il en est de même de $\lambda = c/f$ et donc la longueur d'onde λ change d'un milieu à l'autre. En se souvenant que λ est la distance parcourue par l'onde pendant une période T, il apparaît clairement que λ augmente avec c.

- ☐ Le choix entre onde progressive et onde stationnaire est imposé par l'existence ou non de conditions aux limites. En espace « illimité », prendre une solution en onde progressive ; en espace « clos », prendre une solution en onde stationnaire, soit directement sous la forme d'un mode, soit par superposition de deux ondes progressives en sens opposé, l'onde retour étant engendrée par réflexion de l'onde aller sur l'obstacle.

☐ Les ondes stationnaires conduisent, par les conditions aux limites, à des « quantifications » du genre $\sin(\omega l / c) = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega l / c = n\pi$. Dans cette écriture il est important d'indicer la quantité discrétisée (ce sont les conditions opératoires qui indiquent laquelle), par exemple en écrivant $\omega_n = n\pi c / l$ afin de bien faire apparaître, lorsque l est fixée, la suite ω_n de valeurs possibles pour ω.

☐ Il est faux de croire que la diffraction (par une fente de largeur a par exemple) n'est observable qu'à partir du moment où la taille de l'objet diffractant est de l'ordre de la longueur d'onde ! (voir les questions **19.** et **65.** pour les applications numériques prouvant le contraire) ; d'ailleurs à ce moment-là $\sin\theta_0 = \lambda / a$ serait voisin et même supérieur à 1 ! (et d'un point de vue purement expérimental, la quantité de lumière qui traverse une fente aussi « régulièrement » étroite n'est plus visible à l'œil tellement elle est faible…)

☐ Bien faire la distinction (pour ne pas les confondre) pour une onde lumineuse, entre sa direction de propagation (voir pour cela son terme de phase) et la direction de polarisation (voir le vecteur unitaire qui porte le champ électrique).

Applications directes du cours

■ L'oscillateur harmonique

22. Un ressort s'allonge de 4 cm lorsqu'on lui suspend une masse de 15 g ; quelle est sa constante de raideur (avec son unité) ? quelle est la période des oscillations ?

23. Deux ressorts (de même longueur) ont des constantes de raideur k_1 et $k_2 > k_1$; lequel est le plus facile à comprimer ?

24. Quelles sont les lois d'association des ressorts en série et en parallèle ?

25. Pour un système masse-ressort d'équation différentielle $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$, avec $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$, la solution est $x(t) = a\cos(\omega_0 t + \varphi)$.

Déterminer les constantes d'intégration dans le cas où :

- la masse est lâchée avec une vitesse initiale nulle, l'élongation du ressort étant A,
- la masse est lancée avec une vitesse initiale v_0 à partir de la position $x = 0$.

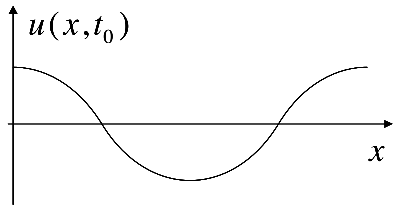
Quelle est la constante de raideur k du ressort sachant que le point M a une masse $m = 100$ g et que la durée mesurée de 10 oscillations est $\tau = 4{,}4$ s ?

■ Signal sur une corde vibrante

26. Une corde immobile à l'instant initial et suffisamment longue est soumise à un vibreur qui y engendre des oscillations sinusoïdales de fréquence f. Une photographie montre que $\tau = 0{,}06$ s après le début des oscillations la corde est ébranlée sur une longueur correspondant à 3λ. Calculer la fréquence f et la longueur d'onde λ sachant que la célérité est $c = 6 \text{ m.s}^{-1}$.

27. Dans l'expérience de Melde décrite à la question **17.** une corde vibrante de masse linéique $\mu = 50 \text{ g.m}^{-1}$ (c'est la masse par unité de longueur) est tendue par une masse $m = 500$ g accrochée à l'extrémité libre après la poulie. La célérité des ondes sur une telle corde est donnée par l'expression $c = \sqrt{\dfrac{T}{\mu}}$ où T est la tension de la corde. Vérifier l'homogénéité de cette expression, commenter les variations de c en fonction de T et μ, puis calculer c dans ce cas.

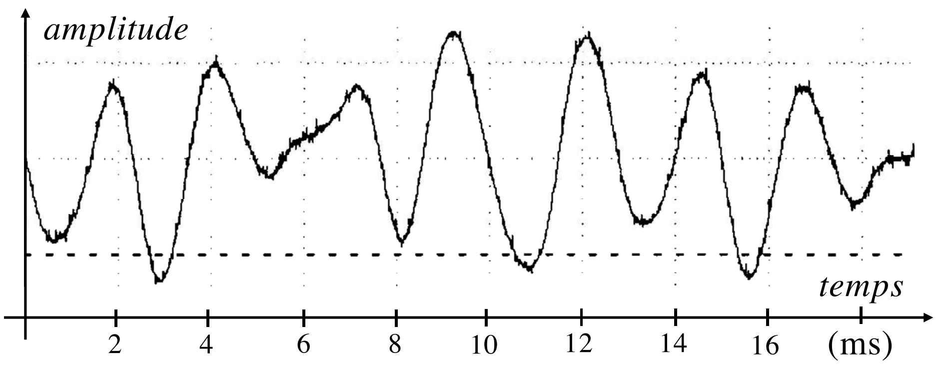
28. L'onde représentée sur le graphe $u(x,t_0)$ ci-dessous représente-t-elle une onde progressive ou une onde stationnaire ? Justifier soigneusement la réponse.



29. Une corde tendue est attachée à ses deux extrémités en O ($x = 0$) et en A ($x = l$) ; son mouvement est donné par $y(x,t) = b\sin(\omega x / c).\sin(\omega t)$.
De quel type de solution s'agit-il ? Cette solution vérifie-t-elle les conditions aux limites ? Déterminer les pulsations propres ω_n possibles.
La corde est en acier de masse volumique $\rho = 7{,}87.10^3 \text{ kg.m}^{-3}$, de diamètre $d = 0{,}30$ mm, de longueur $l = 64$ cm et tendue avec une tension $T = 100$ N.
Calculer la célérité c (la formule est donnée à la question **27.**), la fréquence f_1 du mode fondamental et la longueur d'onde λ_1 correspondante. Faire un schéma de ce mode d'oscillations et interpréter.
Pourquoi un violon joue-t-il plus aigu qu'une contrebasse ?

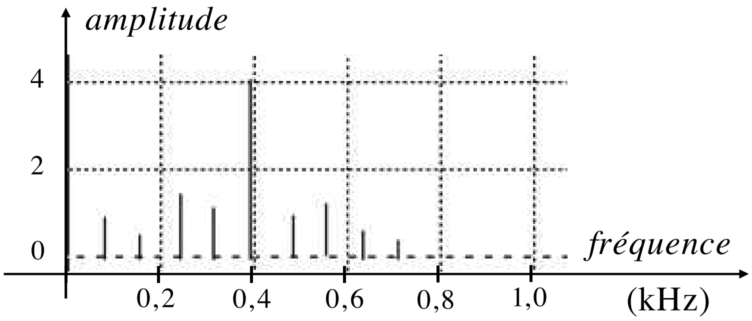
30. Dans l'enregistrement du son produit par une guitare au moyen d'un microphone et d'un amplificateur, c'est la tension produite par l'amplificateur qui est en fait enregistrée. Dans l'étude ci-dessous la corde de mi$_1$ (de fréquence $82{,}4$ Hz) est frappée près du chevalet.

a) Le premier enregistrement concerne la courbe d'amplitude du signal en fonction du temps.



- le signal est-il sinusoïdal ?
- évaluer la fréquence correspondant à la plus grande amplitude

b) Le second enregistrement est une analyse spectrale du signal précédent.



- commenter ce document
- la guitare est-elle accordée ?

c) À quoi pourrait-on s'attendre pour un relevé obtenu après un coup frappé au niveau de la rosace ?

d) Comment s'y prend le guitariste pour jouer d'autres notes sur une corde donnée ?

■ Signal acoustique

31. Pourquoi une tranche de fluide compressible (comme l'air) est-elle équivalente à un système masse-ressort ? Qu'est-ce qui joue le rôle de force de rappel ? Quelle est l'origine des deux termes de l'énergie acoustique de la tranche ?

32. Une paroi placée en $x = 0$ (de type membrane de haut-parleur) vibre avec un déplacement $u(0,t) = A\cos\omega t$. Quel est à l'abscisse $x > 0$, le déplacement $u(x,t)$ de la tranche de fluide sachant que la célérité des ondes sonores produites est c ? Commenter l'expression obtenue puis réécrire $u(x,t)$ en faisant bien apparaître les deux périodes de l'onde.

33. Quelle est la vitesse du son dans l'air à $20°$ C ? (la donner d'abord en m.s^{-1} puis en km.h^{-1}). Un jour d'orage un observateur entend le tonnerre 3 s après avoir vu l'éclair ; qu'en déduit-il ?