# Chapitre 1

# Différentiabilité

Le principal objet du calcul différentiel est d'évaluer la *différence* $f(x+h)-f(x)$, accroissement d'une application $f$ définie au voisinage d'un point $x$ d'un espace normé $E$, à valeurs dans un espace normé $F$. Si l'application $f$ était la restriction d'une application linéaire, l'accroissement $f(x+h)-f(x)$ vaudrait $f(h)$, et tout serait dit ! De ce fait, la grande idée du calcul différentiel est de déterminer s'il est possible de trouver, en chaque point $x$ où l'application $f$ est définie, une *application linéaire* $L_x$ telle que l'accroissement $f(x+h)-f(x)$ soit « à peu près » l'accroissement de $L_x$, c'est à dire $L_x(h)$. En fait on exige que l'application linéaire $L_x$ soit continue, de manière à ce que « différentiabilité » entraine « continuité ». Il est bon de préciser l'expression « à peu près » employée ci-dessus, selon un point de vue déjà adopté pour les fonctions réelles d'une variable réelle, qu'on pourrait exprimer ainsi : au voisinage « très proche » d'un point, une « bonne » courbe est « à peu près » confondue avec la droite tangente en ce point (du latin *tangere* : toucher) ; en quelque sorte l'application linéaire $L_x$ mesure la dose de proportionnalité dans l'accroissement de l'application $f$.

Souvent certains préconisent de choisir les espaces normés de dimension finie, mais cette hypothèse n'apporte aucune simplication significative, et peut même masquer l'essence d'un concept ou d'un résultat. Aussi, dans cet ouvrage est développé le calcul différentiel dans le cadre des espaces normés, ou espaces de ***Banach***, selon le cas. Cependant, il est parfois précisé que tel ou tel espace normé est de dimension finie lorsque cela est pertinent.

## Conventions, notations et rappels

Ce qui suit concerne tous les chapitres.

**1.** ***Tous les espaces normés considérés sont réels*** (sauf mention expresse du contraire). Rappelons qu'un espace normé réel est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels, muni d'une norme. Notons que le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes est un espace normé réel de dimension 2, la norme étant le module ; et plus généralement tout espace normé complexe est aussi un espace normé réel.

Dans un espace normé on dispose des notions classiques de topologie : ***ouvert***, ***fermé***, ***intérieur***, ***adhérence***, ***suite convergente***, ***continuité*** des applications entre parties d'espaces normés, partie ***compacte***, partie ***connexe***, etc.

On dispose aussi des notions classiques de structure uniforme : ***suite de Cauchy***, partie ***complète***, ***uniforme continuité*** entre parties d'espaces normés. Un ***espace de Banach*** est un espace normé complet. Rappelons qu'un espace normé de dimension finie est complet et que sur un tel espace toutes les normes sont équivalentes. Sur un espace normé on dispose d'une notion utile de partie ***bornée***, de ***suite bornée***.

Enfin on rappelle que ***dans un espace de Banach, tout série absolument convergente est convergente****, et que la norme de la somme d'une telle série est inférieure ou égale à la somme de la série des normes.*

**2.** Etant donnés deux espaces normés désignés par $E$ et $F$ on note $\mathscr{L}\big(E,F\big)$ l'espace vectoriel normé formé des *applications linéaires* **continues** de $E$ dans $F$. Lorsque l'espace normé de départ $E$ ***est*** *de dimension finie*, toute application linéaire de $E$ dans un espace normé $F$ est continue.

Lorsque l'espace normé de départ $E$ ***n'***est ***pas*** de dimension finie et $F$ ***n'***est ***pas*** $\big\{0\big\}$, l'espace vectoriel $\mathscr{L}\big(E,F\big)$ ***n'***est ***pas*** réduit à $\big\{0\big\}$, et loin de là, car *pour tout $x$ de $E$, $x \neq 0$, il existe une forme linéaire continue $\varphi$ sur $E$ vérifiant* $\varphi(x) \neq 0$ : c'est un fait que nous admettons, qui relève du théorème de Hahn-Banach.

Un **isomorphisme de l'espace normé** $E$ **sur l'espace normé** $F$ est un isomorphisme linéaire bi-continu.

La norme sur $\mathscr{L}\big(E,F\big)$, dite **norme subordonnée** (à celles de $E$ et $F$), est définie comme suit :

$$\|L\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|L(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|L(x)\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|L(x)\|$$

Si $K$ appartient à $\mathscr{L}\big(E,F\big)$ et $L$ à $\mathscr{L}\big(F,G\big)$, alors $L\circ K$, souvent noté $LK$, appartient à $\mathscr{L}\big(E,G\big)$ et on a l'inégalité : $\big\|LK\big\| \leq \big\|L\big\|\big\|K\big\|$

**3.** La notion de *produit cartésien fini d'espaces normés* est supposée connue, ainsi que la notion d'*application $n$-linéaire continue* $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n \xrightarrow{M} F$ entre espaces normés, et sa norme, dite **norme subordonnée** (à celles de $E_1$, ..., $E_n$ et $F$), est définie comme suit :

$$\|M\| = \sup_{x_1\neq 0,\ldots,x_n\neq 0} \frac{\|M(x_1,\cdots x_n)\|}{\|x_1\|\ldots\|x_n\|} = \sup_{\|x_1\|=1,\ldots,\|x_n\|=1} \|M(x_1,\cdots x_n)\| =$$

$$= \sup_{\|x_1\|\leq 1,\ldots,\|x_n\|\leq 1} \|M(x_1,\cdots x_n)\|$$

Lorsque les espaces normés $E_j$ sont de dimension finie, toute application $n$-linéaire du produit $E_1 \times \cdots \times E_n$ dans un espace normé $F$ est continue.

**4.** Une application $f$ d'un ensemble $X$ dans un ensemble $Y$ pourra être notée indifféremment :

$$X \xrightarrow{f} Y \quad ou \quad f : X \longrightarrow Y$$

**5.** Enfin, lorsqu'une application $f$, à valeurs dans un espace normé $F$, est définie sur un ouvert *épointé* $U \setminus \{a\}$ d'un espace normé $E$, où le point $a$ appartient à $\overline{U}$, et possède une limite en $a$, le symbole $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ désigne cette limite, *sans qu'il soit besoin de préciser dans le symbole que « x tend vers a* ***en restant distinct de*** *a »*.

## 1.1 Applications différentiables

### 1.1.1 Premières définitions

**Définition 1.1.1.** Soient deux espaces normés $E$ et $F$, une application $\Omega \xrightarrow{f} F$ définie sur un ouvert non vide $\Omega$ de $E$, et un point $x$ de $\Omega$. On dit que l'application $f$ est **différentiable en** $x$ s'il existe une *application linéaire continue* $L_x$ de $E$ dans $F$ telle qu'on ait :

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{\|h\|}\big(f(x+h) - f(x) - L_x(h)\big) = 0$$

condition qui peut s'écrire aussi :

$$f(x+h) - f(x) = L_x(h) + \|h\|\,\varepsilon_x(h)$$

où l'application $\varepsilon_x$ est définie dans l'ouvert $\big(-x+\Omega\big) \setminus \{0\}$, et possède la propriété :

$$\lim_{h \to 0} \varepsilon_x(h) = 0$$

**Propriété d'unicité.**

*Si l'application $f$ est, dans les conditions ci-dessus, différentiable en $x$ relativement aux applications linéaires continues $L_1$ et $L_2$, alors $L_1 = L_2$.*

*Démonstration.*

Soit $u$, $u \in E$ ; par différence on a : $\lim\limits_{t \to 0} \frac{1}{t}\big(L_1(tu) - L_2(tu)\big) = 0$ ; c'est-à-dire l'égalité : $(L_1 - L_2)(u) = 0$, parce que les applications linéaires $L_1$ et $L_2$ sont homogènes ; et cela pour tout vecteur $u$, donc $L_1 = L_2$. $\square$

**Le cas particulier $E = \mathbb{R}$**

Dans ce cas on a $L_x(h) = hL_x(1)$, et la condition de différentiabilité s'écrit :

$$\frac{1}{h}\big(f(x+h) - f(x)\big) = L_x(1) + \frac{|h|}{h}\varepsilon_x(h)$$

c'est à dire :

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\big(f(x+h) - f(x)\big) = L_x(1)$$

condition qui exprime que l'application $f$ est **dérivable en** $x$, de **dérivée** $L_x(1)$, *qui est un vecteur de* $F$ qu'on note $f'(x)$, parfois même $\dot{f}(x)$ en Mécanique.

*Dans ce cas particulier* $E = \mathbb{R}$**,** il est commode d'introduire les concepts de **dérivée-à-gauche** et de **dérivée-à-droite**, dont les définitions vont d'elles-même.

Mais ces notions se rencontrent le plus souvent pour une application $J \xrightarrow{f} F$ définie sur un *intervalle* non vide $J$ non nécessairement ouvert, à valeurs dans un espace normé $F$ ; il s'agit alors de la dérivée-à-gauche en l'extrémité droite de $J$, ou de la dérivée-à-droite en l'extrémité gauche de $J$.

### 1.1.2 Définitions, notations et remarques diverses.

La définition 1.1.1. généralise donc un concept déjà connu. C'est pourquoi l'application linéaire continue $L_x$, est appelée *application linéaire tangente en x*, ou plutôt **différentielle de** $f$ **en** $x$ ; certains s'obstinent à l'appeler « dérivée de $f$ en $x$ », ce que nous ne faisons pas, eu égard au concept de dérivée directionnelle, présenté plus loin.

***La différentielle est dorénavant notée*** $Df(x)$***, et on préfèrera écrire*** $Df(x) \cdot h$ ***au lieu de*** $Df(x)(h)$.

Dans le cas particulier $E = \mathbb{R}$ on a donc : $f'(x) = Df(x) \cdot 1$, et on confond souvent, sans que cela soit nécessaire, la dérivée $f'(x)$ et la différentielle $Df(x)$. Cela est légitimé par le fait que l'application $L \longmapsto L(1)$ est une isométrie surjective de l'espace normé $\mathscr{L}\big(\mathbb{R}, F\big)$ sur l'espace normé $F$.

***Si l'espace de départ*** $E$ ***est de dimension finie***, il n'est pas nécessaire de supposer dans la définition 1.1.1. que $L_x = Df(x)$ est continue, car la continuité est, dans ce cas, ***automatique***.

L'énoncé *« l'application $f$ est différentiable en $x$ et de différentielle $Df(x) = L$ »*, dépend a priori des normes dont sont munis les espaces vectoriels $E$ et $F$, mais en réalité *ne dépend que de la classe d'équivalence de chaque norme pour la relation « équivalence des normes »* ; autrement dit l'énoncé ci-dessus ne change pas lorsqu'on remplace les normes de $E$ et $F$ par des normes équivalentes.

Qui plus est, si les espaces vectoriels $E$ et $F$ sont de dimension finie, l'énoncé « l'application $f$ est différentiable en $x$ et de différentielle $Df(x) = L$ » ne dépend que des structures vectorielles de $E$ et $F$, car dans ce cas particulier toutes les normes sont équivalentes.

**Proposition 1.1.2.**
*Dans les conditions de la définition 1.1.1., l'application $f$ est continue au point $x$.*

*Démonstration.*
On a l'inégalité :

$$\|f(x+h) - f(x)\| \leq \|h\| \big(\|Df(x)\| + \|\varepsilon_x(h)\|\big)$$

Lorsque le vecteur $h$ tend vers 0, le membre de droite de cette inégalité tend vers 0. □

**Exercice.**
Si dans la définition 1.1.1. on ne suppose pas l'application linéaire $L_x$ continue, mais qu'on suppose l'application $f$ continue en $x$, alors l'application linéaire $L_x$ est continue.

### 1.1.3 Autres définitions, notations et remarques diverses

Supposant l'application $f$ différentiable en $x$ comme dans la définition 1.1.1, on dispose des « objets » :

$$\begin{gathered} le\ vecteur\ Df(x)\cdot h\ appartenant\ \grave{a}\ l'espace\ norm\acute{e}\ F \\ le\ vecteur\ Df(x)\ \ appartenant\ \grave{a}\ l'espace\ norm\acute{e}\ \mathscr{L}\big(E,F\big) \end{gathered}$$

Si l'application $f$ est différentiable en *tout* point $x$ de l'ouvert $\Omega$, on dit que l'application $f$ est **différentiable dans** $\Omega$, et apparait alors la *nouvelle application* :

$$\Omega \xrightarrow{Df} \mathscr{L}\big(E,F\big)$$

C'est **l'application différentielle de** $f$ ; certains s'obstinent à l'appeler « application dérivée de $f$ ». Lorsque $Df$ est continue sur $\Omega$ on dit que l'application $f$ est **de classe** $\mathscr{C}^1$ **sur** $\Omega$.

***On veillera à ne pas confondre*** $Df$***,*** $Df(x)$ ***et*** $Df(x)\cdot h$

Déterminer $Df$ revient à déterminer tous les $Df(x)$, et déterminer $Df(x)$ revient à déterminer tous les $Df(x)\cdot h$. C'est pourquoi le fait suivant a toute son importance.

**Fait 1.1.3.**

*Lorsque l'application $f$ est différentiable en $x$ on a :*

$$Df(x)\cdot h = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big(f(x+th)-f(x)\big)$$

*Démonstration.*

L'expression $\frac{1}{t}\big(f(x+th)-f(x)\big) = Df(x)\cdot h + \frac{|t|}{t}\|h\|\varepsilon_x(th)$, tend vers le vecteur $Df(x)\cdot h$ lorsque $t$ tend vers 0. □

Ce fait permet de *calculer* $Df(x)$ si l'on sait *déjà* que l'application $f$ est différentiable en $x$, ou bien de *conjecturer* ce que doit être $Df(x)$ si l'on cherche à prouver que l'application $f$ est différentiable en $x$. Néanmoins la limite ci-dessus peut exister sans que l'application $f$ soit différentiable. Aussi, lorsque cette limite :

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(f(x+th)-f(x))$$

existe, on l'appelle **dérivée de $f$ en $x$ dans la direction** $h$, et on la désigne par $\partial_h f(x)$. On emploie parfois l'expresssion « **dérivée directionnelle** ».

Cependant, il arrive que toutes les dérivées directionnelles de $f$ en $x$ existent, sans que l'application $f$ soit différentiable en $x$, ni même que l'application $h\longmapsto \partial_h f(x)$ soit linéaire ; mais la linéarité de l'application $h\longmapsto \partial_h f(x)$ n'implique pas non plus la différentiabilité de $f$ au point $x$. L'exemple 1.1.5. ci-dessous illustre ces phénomènes.

**Fait 1.1.4.**

*Lorsque l'application $f$ est différentiable en $a$ et que l'espace normé $E$ est de dimension finie, muni d'une base $\big(e_1,\dots,e_n\big)$, pour tout $h=\sum_{1\le j\le n} h_j e_j$ de $E$ on a la formule :*

$$Df(a)\cdot h = \sum_{1\le j\le n} h_j \partial_{e_j} f(a)$$

*Démonstration.*

L'égalité $Df(a)\cdot h = \sum_{1\le j\le n} h_j Df(a)\cdot e_j$ résume la preuve, compte tenu de la définition des dérivées directionnelles. □

**Exemple 1.1.5.**

**1.** $E = \mathbb{R}^2$ et :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Les dérivées directionnelles $\partial_{(u,v)} f(0,0)$ existent toutes, mais $(u,v) \longmapsto \partial_{(u,v)} f(0,0)$ n'est pas linéaire. Notons que l'application $f$ est continue en $(0,0)$.

**2.** $E = \mathbb{R}^2$ et :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^4+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Les dérivées directionnelles $\partial_{(u,v)} f(0,0)$ sont toutes nulles, ainsi $(u,v) \longmapsto \partial_{(u,v)} f(0,0)$ est linéaire, mais l'application $f$ n'est pas différentiable en $\big(0,0\big)$. Notons que l'application $f$ est continue en $(0,0)$.

**Proposition 1.1.6.**

*Soit une fonction réelle $\Omega \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ différentiable dans un ouvert $\Omega$ d'un espace normé $E$. Si la fonction $f$ admet au point $a$ de $\Omega$ un maximum ou un minimum, alors $Df(a) = 0$.*

*Démonstration.*

Elle repose sur le fait 1.1.3., car le signe de la quantité : $\dfrac{1}{t}\big(f(a+th) - f(a)\big)$ ne dépend que du signe de $t$. Donc le signe du nombre réel $Df(a)\cdot h$ ne dépend pas de $h$, ce qui impose à la forme linéaire $Df(a)$ d'être nulle. □

**Corollaire 1.1.7.** ***Théorème de Darboux***

*Soit une fonction réelle $J \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ dérivable dans un intervalle non vide $J$ de $\mathbb{R}$. Alors le sous-ensemble $f'\big(J\big)$ est un intervalle.*

*Démonstration.*

Soient $u$ et $v$ appartenant à $f'\big(J\big)$ vérifiant $u < v$, et $w$ appartenant à $\big]u,v\big[$. Il existe $a$ et $b$ dans $J$ tels qu'on ait $u = f'\big(a\big)$ et $v = f'\big(b\big)$. Quitte à changer $f$ en $-f$ on peut supposer $a < b$. Considérons la fonction $g$ définie sur $J$ par

$$g(x) = f(x) - wx$$

On a $g'(a) = f'(a) - w < 0$ et $g'(b) = f'(b) - w > 0$. Pour tout accroissement $h$, $h > 0$, assez petit :

$$\begin{cases} g(a+h) - g(a) = h\big(g'(a) + o(1)\big) \\ g(b-h) - g(b) = h\big(-g'(b) + o(1)\big) \end{cases}$$

D'où l'on tire que pour tout accroissement $h$, $h > 0$, assez petit :

$$g(a+h) < g(a) \quad et \quad g(b-h) < g(b)$$

Ainsi on obtient que le minimum de la fonction continue $g$ restreinte au segment $[a,b]$ est strictement inférieur et à $g(a)$ et à $g(b)$, minimum atteint en un point $c$ appartenant donc à $]a,b[$. Mais alors on a $g'(c) = 0$, c'est à dire $f'(c) = w$. □

**Exercice.**

**1.** La fonction « norme » d'un espace normé n'est pas différentiable à l'origine.

**2.** Examiner en quels points de $\mathbb{R}^2$ les normes suivantes sont différentiables :

$$\max\left(|x|, |y|\right) \quad ; \quad \sqrt{x^2+y^2} \quad ; \quad |x|+|y|$$

Démontrer que la norme d'un espace préhilbertien est différentiable en dehors de l'origine, que sa différentielle au point $x$ est la forme linéaire $h \longmapsto \dfrac{1}{\|x\|}\langle x, h\rangle$.

Lorsque le nombre réel $p$ vérifie $1 < p < +\infty$, examiner le cas de la norme

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

de l'espace de Banach $l^p$ formé des suites réelles $(x_n)_{n\geq 1}$ satisfaisant la propriété : $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < +\infty$.

**3.** Si la fonction « norme » d'un espace normé est différentiable en tout point distinct de l'origine, et si l'application différentielle est bornée sur la sphère unité de l'espace, alors la fonction « carré de la norme » est différentiable en tout point.

**4.** Pour tous $x$ et $y$ d'un espace normé, la limite :

$$\lim_{s \to 0} \frac{1}{s}\Big(\|x+sy\| - \|x\|\Big)$$

existe et celle-ci est, en valeur absolue, inférieure ou égale à $\|y\|$. Cette limite serait en quelque sorte la dérivée au point $x$ de la norme dans la direction *orientée* $y$. *Indication* : considérer la fonction $\psi$ définie par : $\psi(s) = \dfrac{1}{s}\Big(\|x+sy\| - \|x\|\Big)$ ; pour tous $s$ et $s'$ vérifiant $0 < s < s'$, grâce à l'inégalité triangulaire on peut écrire :

$$\psi(s) - \psi(s') = \frac{1}{ss'}\Big(s'\|x+sy\| - s'\|x\| - s\|x+s'y\| + s\|x\|\Big) \leq$$

$$\leq \frac{1}{ss'}\Big((s'-s)\|x\| - (s'-s)\|x\|\Big) = 0$$