

Table des matières

Présentation de la collection	3
Comment utiliser ce livre ?	5
Quelques conseils pour bien apprendre	7
 SAVOIRS	 9
Thème 1 - Algèbre linéaire	10
Thème 2 - Réduction d'un endomorphisme	14
Thème 3 - Produit scalaire	18
Thème 4 - Espace euclidien	20
Thème 5 - Fonctions définies sur $\mathbb{R}^n$	22
Thème 6 - Intégrales généralisées	26
Thème 7 - Variables aléatoires réelles	29
Thème 8 - Couples de variables aléatoires discrètes	35
Thème 9 - Couples de variables aléatoires à densité	38
Thème 10 - Vecteurs aléatoires	41
Thème 11 - Endomorphismes symétriques	45
Thème 12 - Compléments sur les fonctions réelles de n variables	47
Thème 13 - Extrema d'une fonction de n variables réelles	50
Thème 14 - Convergences et approximations	53
Thème 15 - Estimation	56
 SAVOIR-FAIRE	 59
Thème 1 - Algèbre linéaire	60
Comment déterminer le noyau et l'image d'un endomorphisme ?	60
Déterminer une base du noyau	60
Déterminer une base de l'image	62
Comment déterminer la matrice d'un endomorphisme dans une base donnée ?	63
Appliquer les formules de changement de base	63
Calculer les images	64
Comment montrer qu'un sous-espace est stable par un endomorphisme ?	65
Utiliser la définition	65
Montrer qu'une droite est stable	65
Utiliser une famille génératrice	66
Utiliser une équation	67
Comment montrer que deux matrices sont semblables ?	68
Revenir à la définition	68

Déterminer une base convenable	69
À vous de jouer!	70
Thème 2 - Réduction d'un endomorphisme	73
Comment déterminer un polynôme annulateur non nul?	73
Trouver une relation	73
Comment déterminer des valeurs propres?	74
Reconnaître un cas particulier	74
Utiliser un polynôme	74
Appliquer la méthode de Gauss	75
Résoudre un système	76
Comment déterminer des sous-espaces propres?	77
Résoudre un système	77
Comment savoir si une matrice ou un endomorphisme est diagonalisable?	78
Revenir à la définition	78
Calculer la dimension des sous-espaces propres	79
Montrer que E est la somme des sous-espaces propres	81
Comment diagonaliser une matrice?	82
Déterminer les éléments propres	82
Quand utiliser la diagonalisation?	84
Montrer que deux matrices sont semblables	84
Calculer des puissances de matrices	86
À vous de jouer!	88
Thème 3 - Produit scalaire	93
Comment montrer qu'une application définit un produit scalaire?	93
Revenir à la définition	93
Comment montrer une égalité?	94
Utiliser les propriétés du produit scalaire	94
Comment montrer une inégalité?	95
Étudier un signe	95
Appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz	96
Utiliser un produit scalaire	96
Comment montrer que deux sous-espaces vectoriels sont orthogonaux?	97
Calculer un produit scalaire	97
À vous de jouer!	98
Thème 4 - Espace euclidien	103
Comment déterminer les coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée?	103
Calculer des produits scalaires	103
Appliquer la formule de changement de base	103
Comment orthogonaliser une base?	104
Appliquer la méthode de Gram-Schmidt	104
Comment déterminer le supplémentaire orthogonal?	106
Revenir aux définitions	106
Comment montrer qu'une matrice est orthogonale?	107
Utiliser la définition	107
À vous de jouer!	108
Thème 5 - Fonctions définies sur $\mathbb{R}^n$	112
Comment montrer qu'une fonction est de classe $\mathcal{C}^k$, ($k \in \{0, 1\}$)?	112
Appliquer les théorèmes généraux	112
Comment étudier les extrema d'une fonction?	112
Chercher à minorer ou majorer la fonction	112
Déterminer les points critiques	114
À vous de jouer!	115
Thème 6 - Intégrales généralisées	118
Comment justifier la convergence d'une intégrale généralisée?	118
Appliquer un critère de convergence	118
Comment calculer une intégrale généralisée?	119

Déterminer une primitive	119
Intégrer par parties	120
Effectuer un changement de variable	122
Comment étudier une suite ou une fonction définie par une intégrale?	122
Étudier la monotonie	122
Calculer une limite	124
À vous de jouer!	125
Thème 7 - Variables aléatoires réelles	130
Comment déterminer la loi d'une variable aléatoire?	130
Déterminer la loi de $Y = \varphi(X)$	130
Déterminer la loi de $Y = X^2$	131
Comment justifier l'existence d'une espérance?	132
Utiliser un critère de convergence pour les séries	132
Comparer deux variables aléatoires	133
Utiliser un critère de convergence pour les intégrales	134
Comment calculer l'espérance d'une variable aléatoire?	135
Utiliser la loi de la variable aléatoire	135
Appliquer le théorème de transfert avec une variable à densité	135
Appliquer le théorème de transfert avec une variable discrète	136
Appliquer la formule de l'espérance totale	137
À vous de jouer!	138
Thème 8 - Couples de variables aléatoires discrètes	143
Comment déterminer la loi d'un couple?	143
Calculer des probabilités	143
Comment déterminer une loi marginale?	144
Appliquer la formule des probabilités totales	144
Comment déterminer la loi d'une somme?	145
Calculer un produit de convolution discret	145
Comment déterminer la loi de $Z = g(X, Y)$?	146
Appliquer la formule des probabilités totales	146
Déterminer la fonction de répartition	147
Comment calculer l'espérance de $Z = g(X, Y)$?	148
Appliquer le théorème de transfert	148
Comment calculer une covariance?	150
Calculer une espérance	150
Utiliser le lien avec la variance d'une somme	151
Utiliser les propriétés de la covariance	152
À vous de jouer!	153
Thème 9 - Couples de variables aléatoires à densité	156
Comment étudier l'indépendance de deux variables à densité?	156
Appliquer le lemme des coalitions	156
Utiliser la caractérisation de l'indépendance	156
Comment déterminer la loi d'une somme?	157
Calculer un produit de convolution	157
À vous de jouer!	159
Thème 10 - Vecteurs aléatoires	162
Comment déterminer la loi d'un minimum ou d'un maximum?	162
Déterminer la fonction de répartition	162
Comment calculer une espérance ou une variance?	164
Utiliser la linéarité de l'espérance	164
Utiliser l'indépendance	165
Comment déterminer la loi d'une somme de n variables aléatoires?	166
Raisonnement par récurrence	166
À vous de jouer!	167

Thème 11 - Endomorphismes symétriques	172
Comment déterminer une projection orthogonale?	172
Utiliser une base orthonormée	172
Appliquer une méthode matricielle	172
Résoudre un système	174
Comment calculer la distance d'un point à un sous-espace vectoriel?	175
Utiliser une projection orthogonale	175
Comment montrer qu'un endomorphisme ou une matrice est symétrique?	176
Revenir à la définition	176
Comment étudier les éléments propres d'une matrice symétrique réelle?	177
Utiliser les propriétés des matrices symétriques réelles	177
À vous de jouer!	179
Thème 12 - Compléments sur les fonctions réelles de n variables	184
Comment déterminer la nature topologique d'un ensemble?	184
Faire intervenir une fonction continue	184
Comment montrer qu'une fonction est de classe $\mathcal{C}^k$?	185
Appliquer les théorèmes généraux	185
Comment déterminer la matrice hessienne d'une fonction?	185
Calculer les dérivées d'ordre 2	185
Comment obtenir un développement limité?	186
Appliquer la formule qui le définit	186
À vous de jouer!	187
Thème 13 - Extrema d'une fonction de n variables réelles	190
Comment étudier les extrema locaux d'une fonction sur un ouvert?	190
Étudier le signe d'une forme quadratique	190
Comment étudier les extrema globaux d'une fonction sur un ouvert?	192
Appliquer la formule de Taylor	192
Comment étudier les extrema sous contrainte d'une fonction?	193
Se ramener par substitution à un problème sans contrainte	193
Étudier la condition d'ordre 1 pour une contrainte	195
Étudier la condition d'ordre 1 pour des contraintes linéaires	197
Étudier un signe	199
Comment étudier les extrema globaux d'une fonction sur un ensemble fermé borné?	200
Se ramener à une partie ouverte	200
À vous de jouer!	202
Thème 14 - Convergences et approximations	207
Comment établir la convergence en probabilité d'une suite de variables aléatoires?	207
Utiliser des méthodes élémentaires	207
Appliquer l'inégalité de Markov ou de Bienaymé-Tchebychev	208
Appliquer la loi faible des grands nombres	208
Composer par une fonction continue	209
Comment établir la convergence en loi d'une suite de variables aléatoires?	210
Calculer la limite de la suite des fonctions de répartition	210
Calculer la limite de $P(X_n = k)$	211
Appliquer le théorème central limite	212
Appliquer le théorème de Slutsky	213
À vous de jouer!	214
Thème 15 - Estimation	219
Comment étudier un estimateur?	219
Calculer un biais	219
Calculer un risque quadratique	220
Établir la convergence d'un estimateur	221
Comment obtenir un intervalle de confiance?	222
Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev	222
Appliquer le théorème central limite	223
À vous de jouer!	225
CORRIGÉS DES EXERCICES	229