

SAVOIRS

Thème 1 - Algèbre linéaire

La lettre $\mathbf{K}$ désigne $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, la lettre E désigne un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbf{K}$.

[S1.1] Sous-espaces vectoriels et sommes directes

On dit qu'une partie F de E est un sous-espace vectoriel de E lorsque :

- (i) $0_E \in F$;
- (ii) $\forall (x, y) \in F^2, x + y \in F$;
- (iii) $\forall (\lambda, x) \in \mathbf{K} \times F, \lambda x \in F$.

✓ En pratique, pour montrer qu'une partie F de E est un sous-espace vectoriel de E , on montre que $0_E \in F$ et que $x + \lambda y \in F$ pour tous vecteurs x et y de F et pour tout scalaire λ de $\mathbf{K}$.

Soit $F_1, \dots, F_k$ des sous-espaces vectoriels de E .

On dit que la somme $F = F_1 + \dots + F_k$ est directe lorsque tout vecteur x de F s'écrit de façon unique :

$$x = x_1 + \dots + x_k,$$

où $x_i \in F_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$.

On écrit alors $F = F_1 \oplus \dots \oplus F_k$ et dans ce cas :

$$\dim F = \sum_{i=1}^k \dim F_i.$$

✓ La somme $F_1 + F_2$ est directe si, et seulement si $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$. Cette caractérisation de la somme directe pour $n = 2$ ne se généralise pas immédiatement lorsque $n \geq 3$.

[S1.2] Endomorphisme

Un endomorphisme de E est une application linéaire de E dans E . L'ensemble des endomorphismes de E est noté $\mathcal{L}(E)$.

✓ Pour montrer qu'une application u est un endomorphisme de E , on vérifie que $u(x) \in E$ pour tout $x \in E$ et que pour tout $(x, y) \in E^2$ et pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$, on a :

$$u(x + \lambda y) = u(x) + \lambda u(y).$$

[S1.3] Noyau d'un endomorphisme

Pour tout endomorphisme u de E , le noyau de u est l'ensemble :

$$\ker u = u^{-1}(\{0_E\}) = \{x \in E / u(x) = 0_E\}.$$

Cet ensemble est un sous-espace vectoriel de E .

✓ L'endomorphisme u est injectif si, et seulement si $\ker u = \{0_E\}$.

[S1.4] Image et rang d'un endomorphisme

Pour tout endomorphisme u de E , l'image de u est l'ensemble :

$$\operatorname{Im} u = u(E) = \{u(x) \mid x \in E\}.$$

Cet ensemble est un sous-espace vectoriel de E . Le rang de u est la dimension de $\operatorname{Im} u$. On le note $\operatorname{rg} u$.

✓ L'endomorphisme u est surjectif si, et seulement si $\operatorname{rg} u = \dim E$.

[S1.5] Théorème du rang

Soit u un endomorphisme de E . On a :

$$\dim \ker u + \operatorname{rg} u = \dim E.$$

✓ On en déduit que si u est injectif ou surjectif alors u est bijectif.

[S1.6] Matrice d'un endomorphisme

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et u un endomorphisme de E . La matrice de u dans la base $\mathcal{B}$, que l'on note $\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(u)$, est la matrice :

$$\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(u(e_1), \dots, u(e_n)).$$

Cela signifie que si la famille (a_{ij}) représente les coefficients de la matrice $\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(u)$, on a :

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad u(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i.$$

✓ Si u et v sont deux endomorphismes admettant respectivement pour matrices A et B dans une base $\mathcal{B}$ de E alors, dans cette base :

— l'endomorphisme $u \circ v$ admet pour matrice AB ,

— l'endomorphisme $\lambda u + \mu v$ admet pour matrice $\lambda A + \mu B$ pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2$.

L'endomorphisme u est bijectif si, et seulement si la matrice A est inversible. Dans ce cas l'endomorphisme réciproque u^{-1} de u admet pour matrice A^{-1} dans la base $\mathcal{B}$.

[S1.7] Caractérisation matricielle des bases

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille de n vecteurs de E et $\mathcal{B}$ une base de E .

La matrice $\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_n)$ est inversible si, et seulement si la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E .

[S1.8] Matrices de passage

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases de E . La matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$ est la matrice :

$$P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = \text{mat}_{\mathcal{B}}(e'_1, \dots, e'_n).$$

La matrice $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ est inversible et :

$$P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}^{-1} = P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} = \text{mat}_{\mathcal{B}'}(e_1, \dots, e_n).$$

[S1.9] Formules de changement de base

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E . On note $P = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$.

Pour tout vecteur x de E admettant pour matrice X dans la base $\mathcal{B}$ et X' dans la base $\mathcal{B}'$, on a :

$$X = PX'.$$

Pour tout endomorphisme u de E admettant pour matrice A dans la base $\mathcal{B}$ et B la matrice de u dans la base $\mathcal{B}'$, on a :

$$A = PBP^{-1}.$$

✓ En multipliant, à gauche par P^{-1} et à droite par P , on a :

$$B = P^{-1}AP.$$

[S1.10] Matrices semblables

Deux matrices A et B d'ordre n sont semblables s'il existe une matrice P d'ordre n inversible telle que :

$$A = PBP^{-1}.$$

✓ D'après [S1.9], si A et B sont des matrices d'un même endomorphisme alors ces matrices sont semblables.

[S1.11] Sous-espace stable par un endomorphisme

Soit u un endomorphisme de E et F un sous-espace vectoriel de E . On dit que F est stable par u lorsque $u(F) \subset F$, autrement dit :

$$\forall x \in F, \quad u(x) \in F.$$

✓ Le noyau de u et l'image de u sont des sous-espaces vectoriels de E stables par u .

[S1.12] Trace d'une matrice

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n . La trace de A , notée $\text{tr}(A)$, est définie par :

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

[S1.13] Propriétés de la trace

Pour toutes matrices A et B carrées d'ordre n et pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2$, on a :

$$\begin{aligned}\text{tr}(\lambda A + \mu B) &= \lambda \text{tr}(A) + \mu \text{tr}(B), \\ \text{tr}(AB) &= \text{tr}(BA).\end{aligned}$$

[S1.14] Invariance de la trace par changement de base

Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et $P \in \mathcal{GL}_n()$, on a :

$$\text{tr}(A) = \text{tr}(P^{-1}AP).$$

✓ D'après [S1.10], deux matrices semblables ont même trace.

Thème 2 - Réduction d'un endomorphisme

La lettre E désigne un espace vectoriel sur $\mathbf{K}$ de dimension finie.

[S2.1] Polynôme d'endomorphisme ou de matrice

Soit $Q(X) = \sum_{k=0}^p a_k X^k$ un polynôme à coefficients dans $\mathbf{K}$, u un endomorphisme de E et A une matrice d'ordre n .

On définit l'endomorphisme $Q(u)$ par :

$$Q(u) = \sum_{k=0}^p a_k u^k,$$

où $u^0 = id_E$ et $u^k = \underbrace{u \circ \dots \circ u}_{k \text{ fois}}$ pour tout $k \geq 1$.

On définit la matrice $Q(A)$ par :

$$Q(A) = \sum_{k=0}^p a_k A^k,$$

avec la convention $A^0 = I_n$.

✓ Si A est la matrice de u dans une base de E alors $Q(A)$ est la matrice de $Q(u)$ dans cette même base.

[S2.2] Valeurs propres

Soit u un endomorphisme de E , A une matrice carrée d'ordre n et $\lambda \in \mathbf{K}$.

On dit que λ est une valeur propre de u lorsqu'il existe un vecteur x non nul de E tel que :

$$u(x) = \lambda x.$$

✓ Si λ est une valeur propre de u alors $Q(\lambda)$ est une valeur propre de l'endomorphisme $Q(u)$ pour tout polynôme Q .

On dit que λ est une valeur propre de A lorsqu'il existe un vecteur colonne non nul X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ tel que :

$$AX = \lambda X.$$

Cette égalité est équivalente à $(A - \lambda I_n)X = 0$. Donc λ est une valeur propre de A si, et seulement si la matrice $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible.

✓ Pour étudier les valeurs propres d'une matrice, on peut chercher le rang de la matrice $A - \lambda I_n$. Ce rang est strictement inférieur à n si, et seulement si λ est une valeur propre de A .

✓ Lorsque A est la matrice de u dans une base de E , la matrice A et l'endomorphisme u ont les mêmes valeurs propres.

[S2.3] Vecteurs propres

Soit u un endomorphisme de E et A une matrice carrée d'ordre n . On dit que $x \in E \setminus \{0\}$ est un vecteur propre de u lorsqu'il existe $\lambda \in \mathbf{K}$ tel que :

$$u(x) = \lambda x.$$

✓ Dans ce cas, λ est une valeur propre de u [S2.2].

On dit que $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \setminus \{0\}$ est un vecteur propre de A lorsqu'il existe $\lambda \in \mathbf{K}$ tel que :

$$AX = \lambda X.$$

✓ Dans ce cas, λ est une valeur propre de A [S2.2].

[S2.4] Sous-espaces propres

Soit u un endomorphisme de E et A une matrice carrée d'ordre n . L'ensemble :

$$\begin{aligned} E_\lambda(u) &= \{x \in E / u(x) = \lambda x\} \\ &= \ker(u - \lambda \text{id}_E), \end{aligned}$$

est un sous-espace vectoriel de E .

Le scalaire λ est valeur propre de u si, et seulement si $E_\lambda(u) \neq \{0\}$. Dans ce cas, on dit que $E_\lambda(u)$ est le sous-espace propre de u associé à la valeur propre λ .

✓ Si λ est une valeur propre de u alors tout vecteur non nul de $E_\lambda(u)$ est un vecteur propre de u .

De même, si l'ensemble $\{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}) / AX = \lambda X\}$ n'est pas réduit à l'ensemble $\{0\}$ alors λ est une valeur propre de A et on dit que cet ensemble est le sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ .

[S2.5] Spectre

Le spectre d'un endomorphisme u (respectivement d'une matrice A) est l'ensemble de ses valeurs propres, on le note $\text{Sp}(u)$ (respectivement $\text{Sp}(A)$).

[S2.6] Polynôme annulateur

On dit que le polynôme Q est un polynôme annulateur d'un endomorphisme u (respectivement d'une matrice A) lorsque l'endomorphisme $Q(u)$ est nul (respectivement la matrice $Q(A)$ est nulle).

✓ Tout endomorphisme de E et toute matrice carrée admettent un polynôme annulateur non nul.

[S2.7] Racine d'un polynôme annulateur et valeur propre

Si Q est un polynôme annulateur d'un endomorphisme u (respectivement d'une matrice A) et si $\lambda \in \mathbf{K}$ est une valeur propre de u (respectivement de A) alors λ est une racine de Q .

Donc l'ensemble des valeurs propres de u (respectivement de A) est inclus dans l'ensemble des racines dans $\mathbf{K}$ du polynôme Q .

Par contraposée, si $Q(\lambda) \neq 0$ alors λ n'est pas une valeur propre de u .

✓ On en déduit que tout endomorphisme de E admet un nombre fini de valeurs propres.

[S2.8] Propriétés des sous-espaces propres

Soit u un endomorphisme. Si $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ sont des valeurs propres distinctes de u alors la somme :

$$\ker(u - \lambda_1 \text{id}_E) + \dots + \ker(u - \lambda_k \text{id}_E),$$

est directe. En particulier :

$$\sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \dim \ker(u - \lambda \text{id}_E) \leq \dim E.$$

[S2.9] Propriétés des vecteurs propres

Toute famille formée en réunissant des familles libres de sous-espaces propres distincts de u est libre.

✓ Par exemple, si (e_1, e_2) est une famille libre d'un sous-espace propre de u et si e_3 est un vecteur non nul d'un autre sous-espace propre de u alors la famille (e_1, e_2, e_3) est libre.

Une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.

[S2.10] Endomorphisme diagonalisable

Soit u un endomorphisme de E . On dit que u est diagonalisable si E admet une base composée de vecteurs propres de u .

✓ Si $\mathcal{B}$ est une base de E constituée de vecteurs propres de u alors la matrice de u dans cette base est diagonale.

[S2.11] Caractérisation des endomorphismes diagonalisables

Soit u un endomorphisme de E . Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) l'endomorphisme u est diagonalisable,

(ii) $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \ker(u - \lambda \text{id}_E)$.

(iii) $\dim E = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \dim \ker(u - \lambda \text{id}_E)$.

✓ S'il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbf{K}^k$ tel que :

$$\sum_{i=1}^k \dim \ker(u - \lambda_i \text{id}_E) = \dim E,$$