

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Les entiers naturels</b>	<b>9</b>
1.1	Axiome de Peano et entiers naturels . . . . .	10
1.1.1	Quelques rappels de Théorie des Ensembles . . . . .	10
1.1.2	L'axiome de Peano . . . . .	11
1.1.3	Les nombres entiers naturels . . . . .	11
1.2	L'addition des entiers naturels . . . . .	13
1.3	La multiplication des entiers naturels . . . . .	17
1.4	La relation d'ordre dans $\mathbb{N}$ . . . . .	20
1.4.1	La relation d'ordre . . . . .	20
1.4.2	« Bon » ordre . . . . .	22
1.4.3	La division euclidienne . . . . .	23
1.4.4	intervalles de l'ensemble $\mathbb{N}$ . . . . .	25
1.5	Les ensembles finis . . . . .	27
1.5.1	Définition et premières propriétés . . . . .	27
1.5.2	Les parties finies et infinies de $\mathbb{N}$ . . . . .	30
1.6	« Sommes » et « produits » finis . . . . .	33
1.6.1	Composés finis . . . . .	35
1.6.2	Sommes finies d'entiers naturels . . . . .	40
1.6.3	Produits finis d'entiers naturels . . . . .	41
1.6.4	Réunion finie de parties . . . . .	41
1.6.5	Intersection finie de parties . . . . .	42
1.6.6	Principe de Fubini . . . . .	43
1.6.7	Dénombrements élémentaires . . . . .	44
1.7	Les ensembles dénombrables . . . . .	46
1.8	Conclusion . . . . .	50
<b>2</b>	<b>Les nombres rationnels</b>	<b>51</b>
2.1	Les nombres entiers rationnels . . . . .	52
2.1.1	Analyse du problème . . . . .	52
2.1.2	Résolution du problème ou synthèse . . . . .	52
2.1.3	Définition des entiers rationnels et simplification d'écriture . . . . .	59

2.1.4	La division euclidienne dans l'anneau $\mathbb{Z}$ . . . . .	60
2.1.5	La numération des entiers naturels . . . . .	62
2.1.6	Les sous-groupes du groupe abélien $(\mathbb{Z}, +)$ . . . . .	65
2.1.7	Idéaux de l'anneau $\mathbb{Z}$ . . . . .	65
2.1.8	Entiers rationnels premiers entre eux . . . . .	68
2.2	Les entiers modulo un entier naturel . . . . .	70
2.3	Les nombres premiers . . . . .	73
2.3.1	Que sont les nombres premiers ? . . . . .	73
2.3.2	Le théorème de factorisation des entiers rationnels . . . . .	75
2.4	Les nombres rationnels . . . . .	76
2.4.1	Analyse du problème . . . . .	76
2.4.2	Résolution du problème ou synthèse . . . . .	77
2.4.3	Définition des nombres rationnels et simplification d'écriture . . . . .	83
2.4.4	La valeur absolue $p$ -adique . . . . .	86
2.4.4.1	Valuation et valeur absolue $p$ -adique . . . . .	86
2.4.4.2	Point culturel : le théorème d'Ostrowski . . . . .	88
2.4.5	Résultats complémentaires . . . . .	88
2.4.5.1	Autre schéma de construction des nombres et entiers rationnels . . . . .	88
2.4.5.2	Homomorphismes du groupe $(\mathbb{Q}, +)$ dans le groupe $(\mathbb{Q}_+^*, \cdot)$ . . . . .	89
2.4.5.3	Sur la structure de groupe de $(\mathbb{Q}_+^*, \cdot)$ . . . . .	89
2.4.5.4	Sur les sous-groupes du groupe $(\mathbb{Q}, +)$ . . . . .	89
<b>3</b>	<b>Les nombres réels</b> . . . . .	<b>91</b>
3.1	Insuffisance des nombres rationnels . . . . .	91
3.1.1	Introduction . . . . .	91
3.1.2	Des remarques sur le corps ordonné des nombres rationnels . . . . .	91
3.1.3	Le choix . . . . .	93
3.2	Les sections commençantes ouvertes . . . . .	94
3.2.1	Définition et exemples . . . . .	94
3.2.2	Relation d'ordre dans l'ensemble $\mathcal{R}$ . . . . .	95
3.3	La structure de groupe additif . . . . .	97
3.3.1	Définition de l'addition dans l'ensemble $\mathcal{R}$ . . . . .	97
3.3.2	Etude du triplet $(\mathcal{R}, \leq, +)$ . . . . .	98
3.3.3	Premiers changements de notations . . . . .	100
3.3.4	Le signe et la valeur absolue . . . . .	101
3.4	La structure de corps . . . . .	102
3.4.1	La multiplication des <b>s.c.o.</b> strictement positives . . . . .	102
3.4.2	Changements de notations . . . . .	106
3.4.3	La multiplication des <b>s.c.o.</b> . . . . .	107
3.4.4	Changement de notation . . . . .	110

3.5	« Unicité » du corps $\mathcal{R}$ . . . . .	111
3.6	Les nombres réels . . . . .	118
3.6.1	Le corps $\mathbb{R}$ . . . . .	118
3.6.2	Identités remarquables . . . . .	120
3.6.2.1	La valeur absolue . . . . .	120
3.6.2.2	Les puissances entières . . . . .	120
3.6.2.3	La formule du binôme . . . . .	121
3.6.2.4	La formule du multinôme . . . . .	121
3.6.2.5	La formule de la progression géométrique . . . . .	121
3.7	Le cardinal de $\mathbb{R}$ . . . . .	122
3.8	Les suites de nombres réels . . . . .	124
3.8.1	Les suites réelles convergentes . . . . .	125
3.8.2	Les suites réelles de Cauchy . . . . .	127
3.8.3	Les suites réelles monotones . . . . .	128
3.8.4	Les suites puissances . . . . .	131
3.9	Les propriétés équivalentes caractérisant $\mathbb{R}$ . . . . .	133
3.10	Développement décimal d'un nombre réel . . . . .	135
3.10.1	Les nombres décimaux . . . . .	135
3.10.2	Le développement décimal . . . . .	138
3.10.3	Le développement binaire . . . . .	144
3.11	L'expression exponentielle . . . . .	144
3.11.1	Les fonctions monotones . . . . .	144
3.11.2	Divisibilité du groupe multiplicatif $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ . . . . .	147
3.11.3	Les exponentielles de base un nombre strictement positif . . . . .	152
3.12	Pourquoi « la » fonction exponentielle . . . . .	157
3.12.1	Les fonctions monotones convexes . . . . .	157
3.12.2	La fonction exponentielle standard . . . . .	160
3.13	Les suites extraites et leur utilisation . . . . .	166
3.13.1	Le théorème de Bolzano-Weierstrass . . . . .	166
3.13.2	Les fonctions continues . . . . .	170
3.13.3	Les fonctions dérivables . . . . .	173
<b>4</b>	<b>Les nombres complexes</b> . . . . .	<b>179</b>
4.1	Insuffisance du corps des nombres réels . . . . .	179
4.2	Le corps des nombres complexes . . . . .	179
4.2.1	Construction du corps des nombres complexes . . . . .	179
4.2.2	Conjugaison . . . . .	183
4.2.3	L'aspect géométrique réel du corps $\mathbb{C}$ . . . . .	184
4.2.3.1	Les endomorphismes $\mathbb{R}$ -linéaires de $\mathbb{C}$ . . . . .	184
4.2.3.2	Le produit scalaire et le module . . . . .	185
4.3	L'exponentielle complexe . . . . .	187
4.3.1	Les suites de nombres complexes . . . . .	187

4.3.2	La fonction exponentielle complexe . . . . .	188
4.4	Les fonctions circulaires et le plan euclidien . . . . .	196
4.4.1	Les fonctions circulaires . . . . .	196
4.4.2	Le plan euclidien . . . . .	198
4.4.3	Les cercles et le nombre $\pi$ . . . . .	199
4.5	Les équations algébriques . . . . .	205
4.5.1	Les racines de l'unité . . . . .	205
4.5.2	Les équations algébriques de degré inférieur ou égal à 4 . . . . .	208
4.6	Le théorème de d'Alembert-Gauss . . . . .	211
4.6.1	Les fonctions polynômiales . . . . .	211
4.6.2	Le théorème de d'Alembert-Gauss . . . . .	216
4.6.3	Les fonctions polynômiales symétriques élémentaires . . . . .	219
4.7	Les nombres algébriques . . . . .	220
4.7.1	Le corps des nombres algébriques . . . . .	221
4.7.2	Les nombres de Liouville . . . . .	227