

Table des matières

1	Les entiers naturels	9
1.1	Axiome de Peano et entiers naturels	10
1.1.1	Quelques rappels de Théorie des Ensembles	10
1.1.2	L'axiome de Peano	11
1.1.3	Les nombres entiers naturels	11
1.2	L'addition des entiers naturels	13
1.3	La multiplication des entiers naturels	17
1.4	La relation d'ordre dans \mathbb{N}	20
1.4.1	La relation d'ordre	20
1.4.2	« Bon » ordre	22
1.4.3	La division euclidienne	23
1.4.4	intervalles de l'ensemble \mathbb{N}	25
1.5	Les ensembles finis	27
1.5.1	Définition et premières propriétés	27
1.5.2	Les parties finies et infinies de \mathbb{N}	30
1.6	« Sommes » et « produits » finis	33
1.6.1	Composés finis	35
1.6.2	Sommes finies d'entiers naturels	40
1.6.3	Produits finis d'entiers naturels	41
1.6.4	Réunion finie de parties	41
1.6.5	Intersection finie de parties	42
1.6.6	Principe de Fubini	43
1.6.7	Dénombrements élémentaires	44
1.7	Les ensembles dénombrables	46
1.8	Conclusion	50
2	Les nombres rationnels	51
2.1	Les nombres entiers rationnels	52
2.1.1	Analyse du problème	52
2.1.2	Résolution du problème ou synthèse	52
2.1.3	Définition des entiers rationnels et simplification d'écriture	59

2.1.4	La division euclidienne dans l'anneau \mathbb{Z}	60
2.1.5	La numération des entiers naturels	62
2.1.6	Les sous-groupes du groupe abélien $(\mathbb{Z}, +)$	65
2.1.7	Idéaux de l'anneau \mathbb{Z}	65
2.1.8	Entiers rationnels premiers entre eux	68
2.2	Les entiers modulo un entier naturel	70
2.3	Les nombres premiers	73
2.3.1	Que sont les nombres premiers ?	73
2.3.2	Le théorème de factorisation des entiers rationnels	75
2.4	Les nombres rationnels	76
2.4.1	Analyse du problème	76
2.4.2	Résolution du problème ou synthèse	77
2.4.3	Définition des nombres rationnels et simplification d'écriture	83
2.4.4	La valeur absolue p -adique	86
2.4.4.1	Valuation et valeur absolue p -adique	86
2.4.4.2	Point culturel : le théorème d'Ostrowski	88
2.4.5	Résultats complémentaires	88
2.4.5.1	Autre schéma de construction des nombres et entiers rationnels	88
2.4.5.2	Homomorphismes du groupe $(\mathbb{Q}, +)$ dans le groupe (\mathbb{Q}_+^*, \cdot)	89
2.4.5.3	Sur la structure de groupe de (\mathbb{Q}_+^*, \cdot)	89
2.4.5.4	Sur les sous-groupes du groupe $(\mathbb{Q}, +)$	89
3	Les nombres réels	91
3.1	Insuffisance des nombres rationnels	91
3.1.1	Introduction	91
3.1.2	Des remarques sur le corps ordonné des nombres rationnels	91
3.1.3	Le choix	93
3.2	Les sections commençantes ouvertes	94
3.2.1	Définition et exemples	94
3.2.2	Relation d'ordre dans l'ensemble \mathcal{R}	95
3.3	La structure de groupe additif	97
3.3.1	Définition de l'addition dans l'ensemble \mathcal{R}	97
3.3.2	Etude du triplet $(\mathcal{R}, \leq, +)$	98
3.3.3	Premiers changements de notations	100
3.3.4	Le signe et la valeur absolue	101
3.4	La structure de corps	102
3.4.1	La multiplication des s.c.o. strictement positives	102
3.4.2	Changements de notations	106
3.4.3	La multiplication des s.c.o.	107
3.4.4	Changement de notation	110

3.5	« Unicité » du corps \mathcal{R}	111
3.6	Les nombres réels	118
3.6.1	Le corps \mathbb{R}	118
3.6.2	Identités remarquables	120
3.6.2.1	La valeur absolue	120
3.6.2.2	Les puissances entières	120
3.6.2.3	La formule du binôme	121
3.6.2.4	La formule du multinôme	121
3.6.2.5	La formule de la progression géométrique	121
3.7	Le cardinal de \mathbb{R}	122
3.8	Les suites de nombres réels	124
3.8.1	Les suites réelles convergentes	125
3.8.2	Les suites réelles de Cauchy	127
3.8.3	Les suites réelles monotones	128
3.8.4	Les suites puissances	131
3.9	Les propriétés équivalentes caractérisant \mathbb{R}	133
3.10	Développement décimal d'un nombre réel	135
3.10.1	Les nombres décimaux	135
3.10.2	Le développement décimal	138
3.10.3	Le développement binaire	144
3.11	L'expression exponentielle	144
3.11.1	Les fonctions monotones	144
3.11.2	Divisibilité du groupe multiplicatif (\mathbb{R}_+^*, \cdot)	147
3.11.3	Les exponentielles de base un nombre strictement positif	152
3.12	Pourquoi « la » fonction exponentielle	157
3.12.1	Les fonctions monotones convexes	157
3.12.2	La fonction exponentielle standard	160
3.13	Les suites extraites et leur utilisation	166
3.13.1	Le théorème de Bolzano-Weierstrass	166
3.13.2	Les fonctions continues	170
3.13.3	Les fonctions dérivables	173
4	Les nombres complexes	179
4.1	Insuffisance du corps des nombres réels	179
4.2	Le corps des nombres complexes	179
4.2.1	Construction du corps des nombres complexes	179
4.2.2	Conjugaison	183
4.2.3	L'aspect géométrique réel du corps \mathbb{C}	184
4.2.3.1	Les endomorphismes \mathbb{R} -linéaires de \mathbb{C}	184
4.2.3.2	Le produit scalaire et le module	185
4.3	L'exponentielle complexe	187
4.3.1	Les suites de nombres complexes	187

4.3.2	La fonction exponentielle complexe	188
4.4	Les fonctions circulaires et le plan euclidien	196
4.4.1	Les fonctions circulaires	196
4.4.2	Le plan euclidien	198
4.4.3	Les cercles et le nombre π	199
4.5	Les équations algébriques	205
4.5.1	Les racines de l'unité	205
4.5.2	Les équations algébriques de degré inférieur ou égal à 4	208
4.6	Le théorème de d'Alembert-Gauss	211
4.6.1	Les fonctions polynômiales	211
4.6.2	Le théorème de d'Alembert-Gauss	216
4.6.3	Les fonctions polynômiales symétriques élémentaires	219
4.7	Les nombres algébriques	220
4.7.1	Le corps des nombres algébriques	221
4.7.2	Les nombres de Liouville	227