Chapitre 1

Sujet de 2000

Exercice 1 **9 points**

Étude du résultat de la pesée d'un objet de masse m (exprimée en grammes)
On admet que la variable aléatoire X qui prend comme valeur les résultats de la pesée d'un même objet donné suit une loi normale de moyenne m et d'écart-type σ.

Partie A

Dans cette partie, on suppose que $m = 72,40$ et que $\sigma = 0,08$.

1. Calculer la probabilité des événements suivants (les résultats seront arrondis au millième le plus proche) :
   (a) « $X > 72,45$ ».
   (b) « $X < 72,25$ ».
   (c) « $72,30 < X < 72,50$ ».
2. Déterminer le réel strictement positif h (arrondi au centième) tel que la probabilité pour que X prenne une valeur dans l'intervalle $[m - h; m + h]$ soit égale à 0,989.

Partie B

Dans cette partie, on suppose que m et σ sont inconnus.
On a relevé dans le tableau suivant les résultats de 10 pesées d'un même objet (en grammes) :

masse	72,20	72,24	72,26	72,30	72,36
masse	72,39	72,42	72,48	72,50	72,54

Les résultats seront arrondis au centième le plus proche.

1. Calculer la moyenne et l'écart-type de cet échantillon.
2. En déduire des estimations ponctuelles de la moyenne m et de l'écart-type σ de la variable X.
3. Dans la suite, on admet que la variable aléatoire qui à tout échantillon de 10 pesées associe la moyenne de ces pesées suit une loi normale. En prenant pour écart-type la valeur estimée en 2), donner un intervalle de confiance au seuil de 5 % de la moyenne m.
4. L'écart-type de l'appareil de pesée, mesuré à partir de nombreuses études antérieures, est en réalité, pour un objet ayant environ cette masse, de 0,08. Dans cette question, on prend donc $\sigma = 0,08$.
   (a) Donner un intervalle de confiance au seuil de 5 % de la moyenne m.
   (b) Déterminer α (à l'unité près) pour que, au seuil de α %, un intervalle de confiance de m soit $[72,31; 72,43]$.

Exercice 2 — 11 points

Partie A

Suite à un incident nucléaire, on a consigné dans le tableau suivant, heure par heure, les résultats fournis par un appareil de mesure de la radioactivité. Les N_i sont des nombres entiers représentant le nombre de particules recueillies par l'appareil pendant une seconde.

t_i (heures)	0	1	2	3	4	5	6
N_i	170	102	63	39	24	16	9

1. On pose $z_i = \ln(N_i - 2)$ pour tout i variant de 0 à 6 (où ln désigne le logaritme népérien).

   Donner les valeurs de z_i arrondies au millième le plus proche.

   Représenter le nuage $(t_i; z_i)$ dans un repère orthogonal (unités graphiques : 3 cm pour une heure en abscisse, 4 cm pour une unité en ordonnée).

2. Donner le coefficient de corrélation linéaire de la série $(t_i ; z_i)$ et donner une équation de la droite de régression de z en t (les coefficients seront arrondis au millième le plus proche).
3. Donner l'expression de N en fonction de t déduite de cet ajustement.
4. En supposant que l'expression obtenue en 3) reste valable, déterminer à partir de quel relevé on obtiendra une valeur de N inférieure ou égale à 3.

Partie B

Une étude plus approfondie amène à faire l'hypothèse que la fonction, qui, au temps en heures, associe le nombre $N(t)$ est une solution de l'équation différentielle :

$$(E) \quad : \quad y' = \alpha(y - 2) \quad \text{où } \alpha \text{ est une constante réelle}$$

1. Déterminer la solution générale de l'équation différentielle ci-dessus.
2. En déduire la solution qui prend la valeur 170 pour $t = 0$ et la valeur 9 pour $t = 6$.

Partie C

Soit la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = 168\mathrm{e}^{-0,53x} + 2$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal (unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses, 1 mm sur l'axe des ordonnées).

1. Calculer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)$; interpréter géométriquement le résultat obtenu.
2. Chercher les variations de la fonction f sur $[0\ ;\ +\infty[$.
3. Construire la courbe $\mathscr{C}$.
4. Résoudre l'équation $f(x) \leq 30$ dans l'intervalle $[0; +\infty[$; vérifier graphiquement.
5. Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[1\ ;\ 6]$; on donnera la valeur exacte et une valeur décimale approchée à 10^{-2} près.

Correction

Exercice 1

Partie A

X est une variable aléatoire suivant $\mathcal{N}(m;\sigma)$.

1. On suppose que $m = 72,40$ et $\sigma = 0,08$. Posons $T = \dfrac{X - 72,40}{0,08}$.
   T ainsi définie est une variable aléatoire suivant $\mathcal{N}(0;1)$, la loi normale centrée réduite.
   (a) On a alors : $X > 72,45 \Leftrightarrow T > 0,625$. D'où
   $$P(X > 72,45) = P(T > 0,625) = 1 - \Pi(0,625) \approx 0,266$$
   (b) $X < 72,25 \Leftrightarrow T < -1,875$.
   Or on sait que $P(T < -a) = \Pi(-a) = 1 - \Pi(a)$. Par suite,
   $$P(X < 72,25) = P(T < -1,875) = 1 - \Pi(1,875) \approx 0,030$$
   (c) En utilisant la variable T, on se ramène à un intervalle centré sur l'origine :
   $$72,30 < X < 72,50 \Leftrightarrow -1,25 < T < 1,25$$
   D'où $P(72,30 < X < 72,50) = 2\Pi(1,25) - 1 \approx 0,789$.
2. Cherchons h tel que $P(m - h < X < m + h) = 0,989$.
   C'est-à-dire tel que
   $$P(-h < X - 72,40 < h) = 0,989$$
   On cherche donc x tel que $0,989 = 2\Pi(x) - 1$, soit $\Pi(x) = 0,995$.
   Par lecture inverse de la table, on trouve que $\Pi(2,54) = 0,9945$.
   Ainsi,
   $$P\left(-2,54 < \frac{X - 72,40}{0,08} < 2,54\right) = 0,989$$
   Or $2,54 \times 0,08 \approx 0,20$. On a alors :
   $$P\left(-0,20 < X - 72,40 < 0,20\right) = 0,989$$
   soit $P\left(72,40 - 0,20 < X < 72,40 + 0,20\right) = 0,989$.
   Par suite $h \approx 0,20$.

Partie B

1. Pour les valeurs proposées, on obtient une moyenne de $\overline{m} = 72,37$ et un écart-type σ_e d'environ $\sigma_e \approx 0,11$.
2. On suppose alors que les résultats observés sont la réalisation de la même variable aléatoire X. Une estimation ponctuelle de la moyenne m de X est $\overline{m} = 72,37$ et, comme il y a 10 valeurs, $\sigma_e = 0,11 = \dfrac{\sigma}{\sqrt{10}}$ d'où $\sigma \approx 0,35$.
3. On cherche un intervalle de confiance I au seuil de risque de $5\,\%$, c'est-à-dire un taux de confiance de $0,95\,\%$. On veut donc $P(X \in I) = 0,95$. En faisant le changement de variable $X \mapsto T$, où $T = \dfrac{X - 72,37}{0,35/\sqrt{10}}$, cela revient à chercher a tel que
$$P(-a < T < a) = 2\Pi(a) - 1 = 0,95$$
D'après la table, on trouve $a = 1,96$.
L'intervalle de confiance cherché est donc :
$$\left[\overline{m} - a\frac{\sigma}{\sqrt{10}}; \overline{m} + a\frac{\sigma}{\sqrt{10}}\right] = [72,30; 72,44]$$
4. Ici, on prend $\sigma = 0,08$.
   (a) Dans ce cas, on a alors l'intervalle de confiance :
   $$\left[\overline{m} - a\frac{0,08}{\sqrt{10}}; \overline{m} + a\frac{0,08}{\sqrt{10}}\right] = [72,32; 72,42]$$
   où $a \approx 1,96$ est le même que dans la question précédente.
   (b) On cherche un seuil de risque de $\alpha\,\%$ de telle sorte que
   $$P\big(X \in [72,31; 72,43]\big) = 1 - \frac{\alpha}{100}$$
   Cela revient à chercher a tel que $72,37 - a\dfrac{0,08}{\sqrt{10}} = 72,43$; c'est-à-dire tel que $a\dfrac{0,08}{\sqrt{10}} = 0,06$. On trouve $a \approx 2,37$.
   On a donc, en posant $T = \dfrac{X - 72,37}{0,08/\sqrt{10}}$,

$$\begin{aligned} P\big(X \in [72,31;72,43]\big) &= P\big(\,|T| \leq 2,37\big) \\ &= 2\Pi(2,37) - 1 \approx 0,98 \end{aligned}$$

Ainsi, le seuil de risque pour un tel intervalle est de $\alpha = 2\,\%$.

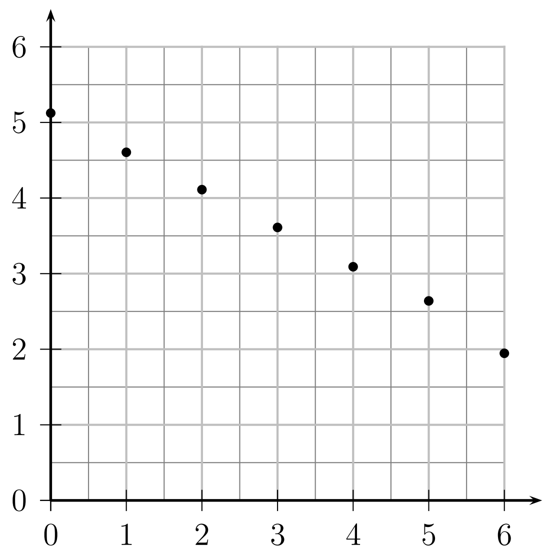
Remarque. L'intervalle étant plus étendu, l'indice de confiance est plus élevé.

Exercice 2

Partie A

1. Soit $z_i = \ln(N_i - 2)$, $i = 1, \ldots, 6$.

t_i (heures)	0	1	2	3	4	5	6
N_i	170	102	63	39	24	16	9
z_i	5,124	4,605	4,111	3,611	3,091	2,639	1,946



2. Le coefficient de corrélation linéaire est d'environ $-0,999$, et l'équation de la droite de régression est

$$z = -0,517t + 5,142$$

3. Comme $z = \ln(t)$, on en déduit que $N = \mathrm{e}^{-0{,}517t+5{,}142}$.
4. Une valeur de N inférieure à 3 est obtenue si $\mathrm{e}^{-0{,}517t+5{,}142} \leq 3$ donc pour $t \geq -\dfrac{\ln(3) - 5,142}{0,517} \approx 7,82$ h, soit environ 7 h et 50 minutes.

Partie B

On considère l'équation différentielle :

$$y' = \alpha(y - 2)$$

1. L'équation peut s'écrire : $y' - \alpha y = 2\alpha$. La solution générale de l'équation sans second membre $y' - \alpha y = 0$ est $y(t) = C\mathrm{e}^{\alpha t}$.

   Une solution particulière de l'équation générale est la fonction constante $y_0(t) = 2$.

   La solution générale de l'équation proposée est

   $$f(t) = y(t) + y_0(t) = C\mathrm{e}^{\alpha t} + 2$$

2. Conditions initiales : $f(0) = 170 \Rightarrow C + 2 = 170$, d'où $C = 168$.

   $f(6) = 9 \Leftrightarrow 168\mathrm{e}^{6\alpha} = 7 \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{\ln(7/168)}{6} \approx -0,53$

   La solution cherchée est donc :

   $$f : t \in [0; +\infty[\longmapsto 168\mathrm{e}^{-0{,}53t} + 2$$

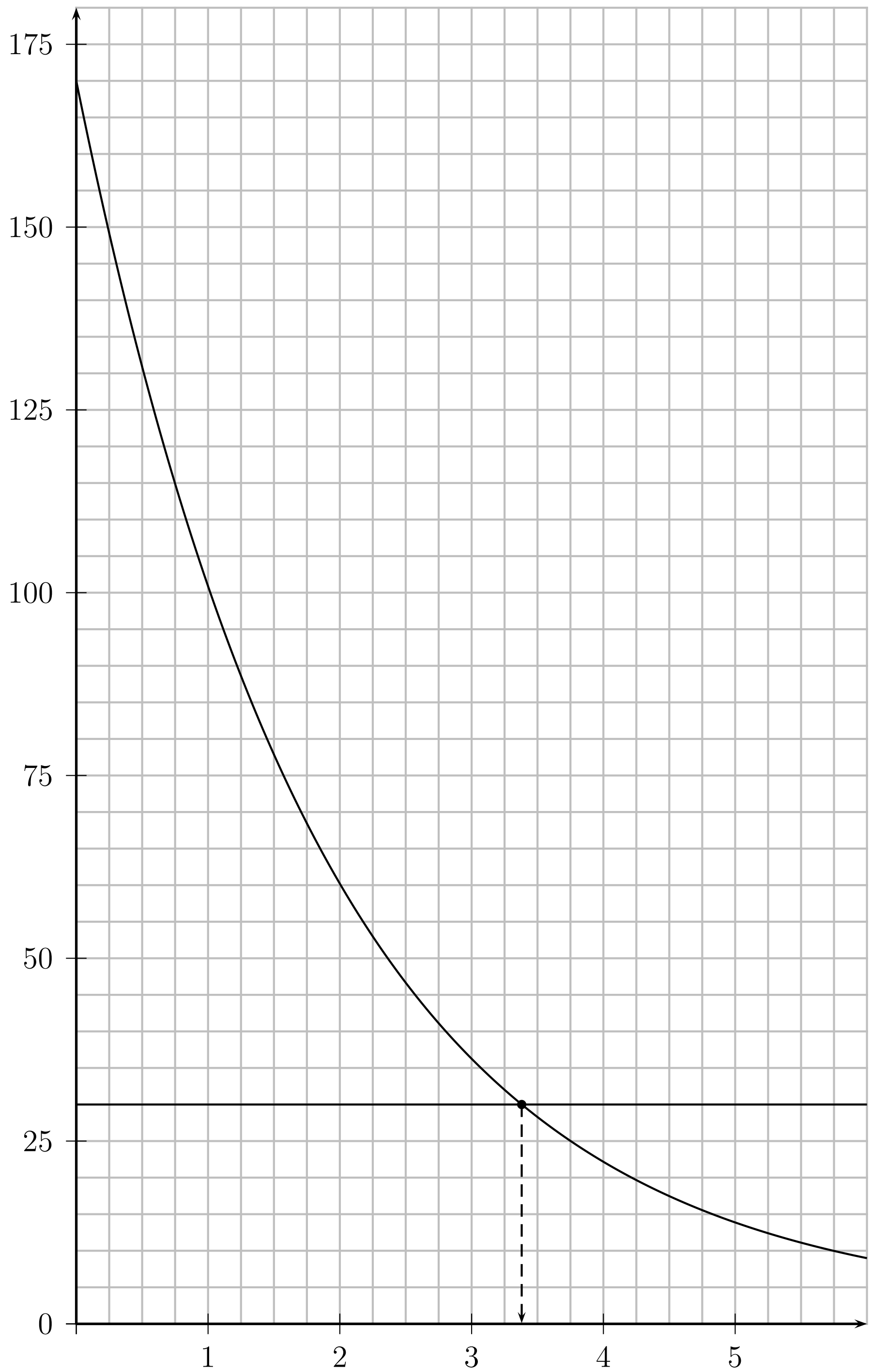
Partie C

Soit donc f, définie sur $[0; +\infty[$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{-0{,}53x} + 2$$

1. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-0{,}53x} = 0$, d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$. La courbe $\mathscr{C}$ présente donc une asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$.
2. Calculons $f'(x) = -0,53 \times 168\mathrm{e}^{-0{,}53x} = -89,04\mathrm{e}^{-0{,}53x}$.

   Comme $f'(x) < 0$, la fonction f est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$.
3. Cf. courbe page suivante.


175
150
125
100
75
50
25
0
1
2
3
4
5