Chapitre 1

Rappels

1.1 Définition d'une fonction

Définition 1.1.1. Soit $\mathscr{D}$ une partie de $\mathbf{R}$ ($\mathscr{D} \subset \mathbf{R}$, c'est-à-dire un *sous-ensemble*). Une *fonction numérique* (réelle) définie sur $\mathscr{D}$ est un procédé qui, à chaque nombre $x \in \mathscr{D}$, associe un unique nombre réel $f(x)$.

Notation. Si y est le nombre associé à $x \in \mathscr{D}$ par une fonction f, on écrit : $y = f(x)$. Une fonction numérique f définie sur $\mathscr{D}$ s'écrit en général $x \mapsto f(x)$.

Définition 1.1.2. L'ensemble $\mathscr{D}$ d'appelle *l'ensemble de définition* de f, noté $\mathscr{D}_f$.

Remarque. Dans de nombreuses situations, on prendra $\mathscr{D}_f = I$, intervalle de $\mathbf{R}$.

Définition 1.1.3. Dans l'écriture $x \mapsto f(x)$, x est la *variable* et $f(x)$ est *l'image* de x par f.

Si $y = f(x)$, on dit que x est **un** *antécédent* de y par la fonction f.

x : variable   image de x x

$$f(x) = y$$

antécédent de y

Remarque. Dans de nombreux cas, le nombre y peut avoir plusieurs antécédents par f. On sait par exemple que $2^2 = 4$ et $(-2)^2 = 4$; ainsi, 4 a deux antécédents par la fonction carré : 2 et -2.

1.2 Sens de variation

Soit I un **intervalle** de $\mathbf{R}$.

Définition 1.2.1. Une fonction f définie sur I est *croissante sur I* si, pour tous a et b de I,

$$a < b \Rightarrow f(a) \leqslant f(b)$$

Une fonction f définie sur I est *strictement croissante sur I* si, pour tous a et b de I,

$$a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$$

L'ordre de a et b est conservé par f.

Remarque. Dire que f est strictement croissante, c'est dire que quand x augmente, $f(x)$ augmente aussi. Dire qu'elle est croissante, c'est dire que quand x augmente, $f(x)$ ne diminue pas ...

Proposition 1.2.1. *Si f strictement croissante sur I alors f est croissante sur I.*

On a les mêmes définitions pour f décroissante, et f strictement décroissante.

Définition 1.2.2. Une fonction f, définie sur I, est décroissante sur I si, pour tous a et b dans I,

$$a < b \Rightarrow f(a) \geqslant f(b)$$

L'ordre de a et b est renversé par f.

Attention : Le fait que I soit un intervalle est, ici, essentiel. Considérons par exemple la fonction inverse $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ définie sur $\mathbf{R}^*$. Elle est décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0[$ et sur $]0\ ;\ +\infty[$, mais pas sur $\mathbf{R}^*$! Car si on prend $-2 < +2$, on a $-\dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{2}$ ce qui est en contradiciton avec la stricte décroissante de la fonction inverse !

Chapitre 2

Premières fonctions

Dans ce chapitre, nous allons rappeler les premières fonctions de base qui serviront de références pour l'étude de fonctions plus générales. Elles permettent en outre de développer les notions importantes de limite d'une fonction et de dérivation.

Les fonctions plus générales (et généralement pressenties comme « compliquées ») seront étudiées au chapitre 5.

2.1 Fonctions affines

Définition 2.1.1. Une fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est *affine* si son expression $f(x)$ est de la forme :

$$f(x) = ax + b$$

$\star$ Si $a = 0$, $f(x) = b$, f est une fonction constante ;

$\star$ Si $b = 0$, $f(x) = ax$, f est une fonction linéaire.

Proposition 2.1.1 (Représentation graphique)**.** *La représentation d'une fonction affine est une droite d'ordonnée à l'origine b (i.e. passant par le point de coordonnées $(0; b)$) et de coefficient directeur a.*

Proposition 2.1.2. *Si f est une fonction affine, alors, pour tout x_1 et x_2 dans $\mathbf{R}$, on a*

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{2.1.1}$$

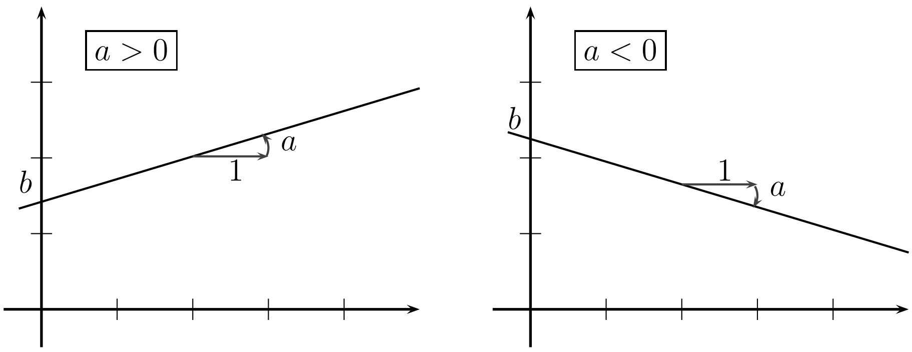


Figure 2.1 – Fonction affine croissante ; décroissante

Remarque. Les fonctions linéaires traduisent toutes les situations dans lesquelles il y a proportionnalité. Leur représentation graphique est une droite passant par l'origine du repère.

Déterminer l'équation d'une droite : méthode

C'est une méthode importante qu'on utilise souvent, soit pour déterminer une fonction affine, soit déterminer une équation de droite : tangente à une courbe, droite de régression, etc.

Supposons donnée une fonction affine par simplement deux points : $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$.

On cherche une fonction f, de la forme $f(x) = ax + b$, telle que

$$\begin{cases} f(x_A) & = y_A \\ f(x_B) & = y_B \end{cases}$$

1. Détermination du coefficient directeur a :

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_A - y_B}{x_B - x_A}$$

2. Une fois a trouvé, on détermine b en écrivant que le point A, par exemple, appartient à la droite représentant f : c'est-à-dire que ses coordonnées vérifient son équation, soit $ax_A + b = y_A$. On tire alors b de cette équation :

$$b = y_A - ax_A$$

Exemple 1. Déterminer la fonction affine f vérifiant : $\begin{cases} f(3) & = 3 \\ f(6) & = 2 \end{cases}$

f étant une fonction affine, son expression est du type $f(x) = ax + b$.

On calcule d'abord

$$a = \frac{2-3}{6-3} = -\frac{1}{3}$$

c'est-à-dire que $f(x) = -\frac{1}{3}x + b$.

Puis on calcule b en utilisant, par exemple $f(3) = 3$:

$$-\frac{1}{3} \times 3 + b = 3 \text{ qui donne } b = 3 + 1 = 4$$

La fonction f cherchée est donc définie par $f(x) = -\frac{1}{3}x + 4$.

2.2 Fonctions puissances entières

2.2.1 Puissance entière positive

La première fonction de référence est la *fonction carré*.

Définition 2.2.1. La fonction carré est définie sur $\mathbf{R}$ par

$$f\colon x \longmapsto x^2 \tag{2.2.1}$$

Elle permet, en lui ajoutant une fonction affine de « fabriquer » les fonctions polynômes du 2e degré.

Définition 2.2.2. Soit $n \in \mathbf{N}$. Un *polynôme de degré* n est une expression du type

$$ax^n + bx^{n-1} + \cdots + px^2 + qx + r \tag{2.2.2}$$

la fonction

$$P : x \longmapsto ax^n + bx^{n-1} + \cdots + px^2 + qx + r \tag{2.2.3}$$

est une *fonction polynôme* de degré n.

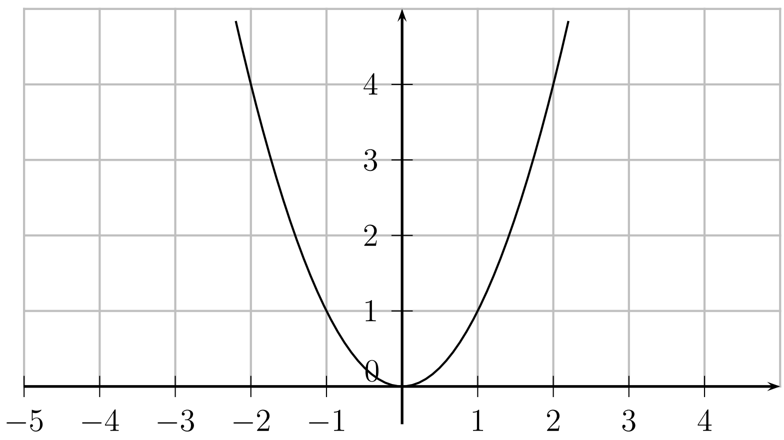


FIGURE 2.2 – Fonction « carré »

Proposition 2.2.1. *La représentation graphique de la fonction polynôme du 2^d degré*

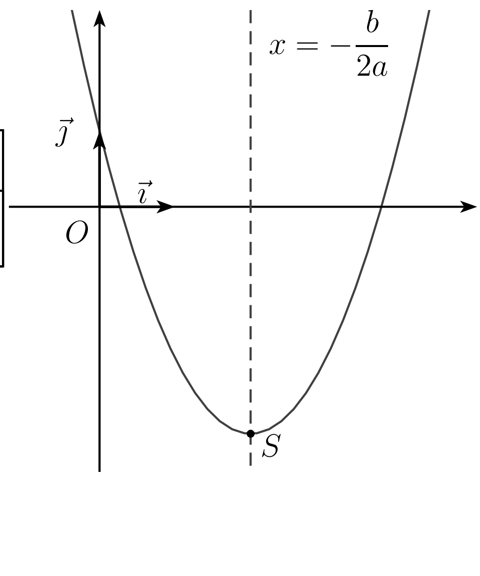
$$f : x \mapsto ax^2 + bx + c$$

est une parabole de sommet $S\left(-\frac{b}{2a}; f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$, *d'axe de symétrie la droite* $x = -\frac{b}{2a}$ *et dont la concavité est tournée vers les* $y > 0$ *si* $a > 0$, *vers les* $y < 0$ *si* $a < 0$.

<u>a > 0</u>

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
f	$+\infty$	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	$+\infty$

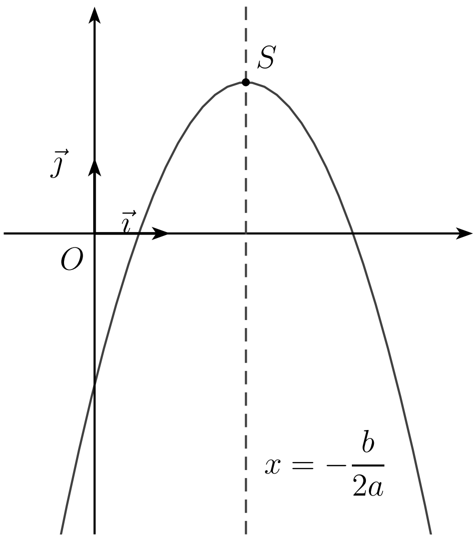
La concavité de la courbe est tournée vers les $y > 0$ (le haut).



a < 0

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	$\searrow$	$-\infty$

La concavité de la courbe est tournée vers les $y < 0$ (le bas).



Remarque. Pour $x = 0$, on a $f(0) = c$. La parabole coupe l'axe des ordonnées au point $(0; c)$.

Proposition 2.2.2. *Tout parabole d'axe parallèle à (Oy) a une équation du type*

$$y = ax^2 + bx + c$$

2.2.2 Trinôme du 2^d^ degré

Sur les graphiques précédents, on voit que si la courbe est trop haute (dans le cas $a > 0$) ou trop basse (dans le cas $a < 0$), celle-ci ne coupe pas l'axe (Ox) et l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a pas de solutions. C'est lié à l'existence d'une factorisation de $f(x)$.

Exemple 2. Soit le polynôme $P(x) = x^2 + x - 3$.

On a

$$\begin{aligned} x^2 + x - 3 &= x^2 + 2 \times \frac{1}{2} \times x - 3 \\ &= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3 \\ &= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{13}{4} \end{aligned}$$

On reconnaît l'identité $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$, d'où :

$$\begin{aligned} x^2 + x - 3 &= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2 \\ &= \left(x + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}\right) \end{aligned}$$

L'équation $x^2 + x - 3 = 0$ aura donc deux solutions (théorème du produit nul).

Exemple 3. Mais, par contre, si l'on considère le polynôme $P(x) = x^2 + x + 3$.

On a cette fois-ci :

$$\begin{aligned} x^2 + x - 3 &= x^2 + 2 \times \frac{1}{2} \times x + 3 \\ &= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \\ &= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} \end{aligned}$$

On ne reconnaît plus $a^2 - b^2$! Ce plolynôme **ne peut pas** se factoriser ! Et l'équation $x^2 + x + 3 = 0$ correspondante n'aura pas de solutions.

Définition 2.2.3. Une valeur de x qui annule un polynôme P s'appelle une *racine* de ce polynôme. C'est une solution de l'équation $P(x) = 0$.

On considère le polynôme

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

et l'équation du 2^{d} degré associée :

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{2.2.4}$$

On pose :

$$\Delta = b^2 - 4ac \tag{2.2.5}$$