Chapitre 1

Les fonctions

Motivations

La Physique fait souvent appel aux fonctions comme dans les exemples suivants :

1. L'énergie potentielle d'un corps de masse m_0 à la hauteur h est définie par une fonction linéaire de la hauteur : $E_{pot} = m_0\, g\, h$. L'énergie cinétique est une fonction quadratique de la vitesse v du corps : $E_{cin} = \frac{1}{2} m_0 v^2$.
2. Le module de la force d'attraction électrique existante entre deux charges Q_1 et Q_2 est inversement proportionnelle au carré de la distance r entre elles, comme l'affirme la loi de Coulomb : $|F| = k\frac{Q_1 Q_2}{r^2}$. On observe cette dépendance aussi dans la force d'attraction gravitationnelle entre deux corps de masse m_1 et m_2 : $|F| = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$.
3. Divers phénomènes physiques suivent une loi exponentielle. Par exemple
   (a) La différence de potentiel dans la charge d'un condensateur est donnée par (voir chapitre équations différentielles) $V(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$, où E est une constante de même dimension que $V(t)$.
   (b) La montée en température dans un four peut être exprimée à l'aide d'une constante de temps τ caractéristique du four : $T(t) = T_0(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$.
   (c) Si un échantillon radioactif contient N_0 noyaux radioactifs, au bout d'un temps T appelé période, seulement $N_0/2$ noyaux restent radioactifs ; au bout de deux périodes, seulement $N_0/4$ noyaux restent radioactifs et ainsi de suite. La loi de désintégration radioactive est alors donnée par $N(t) = N_0 e^{-\frac{t}{T}\ln 2}$.
4. Un exemple où intervient la fonction logarithme est le suivant. Un "diagramme de Bode" est utilisé pour étudier le comportement fréquentiel d'un système. Si la réponse fréquentielle du système est $H(i\omega)$, alors le gain en tension est $20Log_{10}(|H(i\omega)|)$.

1.1 Ensembles de nombres - Règles de calcul

Les différents ensembles de nombres

- ➔ $\mathbb{N}$: ensemble de nombres entiers naturels
- ➔ $\mathbb{Z}$: ensemble de nombres relatifs
- ➔ $\mathbb{Q}$: ensemble de nombres rationnels
- ➔ $\mathbb{R}$: ensemble de nombres réels
- ➔ $\mathbb{C}$: ensemble de nombres complexes

On a les inclusions suivantes : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Théorème 1.1 :
Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $\sqrt{n} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, à moins que n soit un carré. De la même manière, π et e appartiennent à $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Exemple : $\sqrt{5}$ n'est pas un rationnel. Mais $\sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$ est rationnel.

Exercice 1.1 Placer les nombres ci-dessous dans leur ensemble respectif :

$$10^3; \frac{1}{6}; 1; -1; \frac{1}{3}; 0; \sqrt{2}; -1.2; \sqrt{\frac{4}{9}}; \pi; -0.008; \frac{3}{25}; i; -10025; 3.14; \frac{3}{10^6}; \sqrt{9}; 1+2i; 1+0i; 2i.$$

Rappels

Pour $a, b \in \mathbb{R}$:

- ➔ $ab = 0$ si et seulement si $a = 0$ ou $b = 0$;
- ➔ $ab \geqslant 0$ si et seulement a et b sont de mêmes signes ;
- ➔ $ab \leqslant 0$ si et seulement a et b sont de signes opposés ;
- ➔ soit $b \neq 0$; $\frac{a}{b} = 0$ si et seulement si $a = 0$;
- ➔ soit $b \neq 0$; $\frac{a}{b} \geqslant 0$ si et seulement si a et b sont de mêmes signes ;
- ➔ soit $b \neq 0$; $\frac{a}{b} \leqslant 0$ si et seulement si a et b sont de signes opposés.

Attention

Multiplication et division sont prioritaires sur addition et soustraction ! Par exemple :

$$a + b \cdot c \neq (a + b) \cdot c$$

Rappels sur calcul dans les inégalités

Soient $x, y, z, k \in \mathbb{R}$. Alors

- ➔ on a soit $x = y$, soit $x < y$, soit $x > y$.
- ➔ $\begin{cases} x < y \\ y < z \end{cases} \Longrightarrow x < z$ (transitivité)
- ➔ $x < y \Longrightarrow k + x < k + y$
- ➔ $\begin{cases} x < y \\ k > 0 \end{cases} \Longrightarrow kx < ky$
- ➔ $\begin{cases} x < y \\ k < 0 \end{cases} \Longrightarrow kx > ky$

Remarque

On verra que les inégalités ne sont pas définies dans $\mathbb{C}$.

Exercice guidé 1.1

Soient $-1 < x < 1$ et $2 < y < 3$. Encadrer les expressions

1. xy ;
2. $xy + 2x$.

1. $\begin{cases} -1 < x < 1 \\ y \ldots 0 \end{cases}$ implique que . . < xy < . . On remarque que . . < $-y$ < . . .
   On obtient alors par transitivité . . . . < xy < . . . . .
2. De plus . . < $2x$ < . . Par le point précédent . . < $xy + 2x$ < . .

Rappels sur les fractions

➔ simplification : $\dfrac{a \cdot x}{b \cdot x} = \dfrac{a}{b}$

➔ produit : $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{a \cdot c}{b \cdot d}$

➔ somme : $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad + bc}{bd}$

➔ quotient : $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{d}{c}$

Attention

$$\frac{a+b}{c+d} \neq \frac{a}{c} + \frac{b}{d} \qquad \frac{a+k}{b+k} \neq \frac{a}{b} \qquad \frac{a}{c+d} \neq \frac{a}{c} + \frac{a}{d}$$

Exercice 1.2 Réduire : $A = 3 + \dfrac{1}{3}$, $B = -\dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{4}$, $C = -\dfrac{3}{2} + \dfrac{2}{3}$, $D = \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{2}{5}$, $E = \dfrac{4}{5} / \dfrac{2}{5}$, $F = \dfrac{1}{3} + \dfrac{7}{3} \cdot \left(\dfrac{3}{7} + \dfrac{5}{35}\right)$.

Exercice guidé 1.2

Les fractions $A = \dfrac{5}{xy} - \dfrac{8}{x}$ et $B = \dfrac{xy}{5} - \dfrac{x}{8}$ sont-elles inverses l'une de l'autre ?

Première méthode : $A =$ . . . . . . ; $B =$ . . . . En conséquence,

$$\frac{1}{B} = \ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Deuxième méthode : $A \cdot B =$ . . . . $\neq$ . .

Exercice guidé 1.3

Réduire les fractions suivantes : $\dfrac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$, $\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{x} + 2}$.

$\dfrac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} =$ . . . . ; $\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{x} + 2} =$ . . . . . . $=$ . . . .

Exercice guidé 1.4
Résoudre

1. $(5x-3)(1+2x)=0$
2. $(5x-3)(1+2x)<0$
3. $\dfrac{5x-3}{1+2x} \leqslant 0$.

1. $(5x-3)(1+2x)=0 \iff$ . . . . ou . . . .
2.

x	$-\infty$ $+\infty$
$5x-3$	
$1+2x$	
$(5x-3)(1+2x)$	

Par conséquent $(5x-3)(1+2x)<0 \iff$ . . . .

3.

x	$-\infty$ $+\infty$
$5x-3$	
$1+2x$	
$\dfrac{5x-3}{1+2x}$	

$\dfrac{5x-3}{1+2x} \leqslant 0 \iff$ . . . .

Exercice 1.3 Résoudre $\dfrac{x+4}{x-2} \leqslant 0$.

Remarque
Pour résoudre une équation ou une inéquation, on ramène le second membre à 0 et on factorise le premier membre.

Exercice 1.4 Résoudre $(2x+1)=(x+3)(4x+2)$.

Exercice guidé 1.5
Résoudre

1. $\dfrac{3x}{x+1}=2$;

2. $\dfrac{x^2+2x}{(x+1)(x+2)} = 2.$

> 1. Pour . . . . . , $\dfrac{3x}{x+1} = 2$ est équivalent à . . . . , c'est-à-dire $x =$ . .
> 2. Pour . . . . . et . . . . . , $\dfrac{x^2+2x}{(x+1)(x+2)} = 2$ donne . . . . . ce qui est exclu.
>   Il n'y a donc pas de solution.

Exercice 1.5 Résoudre $\dfrac{x}{x+1} = 2$.

1.2 Rappels généraux sur les fonctions

1.2.1 Définition

Définition 1.1 :
Soit I un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. On appelle fonction f de I dans $\mathbb{R}$ toute relation qui à un élément x de I associe un seul élément de $\mathbb{R}$, noté $f(x)$. On écrit symboliquement :

$$\begin{array}{rccl} f : & I & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & y = f(x) \end{array}$$

- ➔ L'ensemble I est appelé domaine ou ensemble de définition de la fonction f. On le notera aussi D_f.
- ➔ Le nombre $f(x)$ est l'image de x par la fonction f.
- ➔ L'ensemble $\mathcal{I}m\ _f = \{f(x), x \in I\}$ est l'ensemble image de f.
- ➔ Pour chaque $y \in \mathcal{I}m\ _f$ un point $x \in D_f$ tel que $y = f(x)$ est appelé antécédent de y.

Exercice guidé 1.6
Le relations f et g définies ci-dessous sont-elles des fonctions ? Pourquoi ?

$$\begin{array}{rccl} f : & [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & y = x^2 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rccl} g : & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & y : y^2 = x \end{array}$$

> f est une fonction puisque tout $x \in [-1,1]$ . . . .
> g n'en est pas une, car $x = 1$, par exemple, ... et . . . . . .

1.2.2 Graphe d'une fonction

Définition 1.2 :
Soit I un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}$. L'ensemble

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in I, y = f(x)\}$$

est appelé graphe de f. Il est représenté par une courbe dans un repère orthogonal.

Exemple : On sait bien que le graphe de la fonction f de l'exemple précédent est une parabole .

Attention

- ➔ Soient $f : D_f \to \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in D_f$. Alors le graphe de f ne comporte qu'un seul point d'abscisse x_0.
  Par conséquent pour savoir si une courbe est le graphe d'une fonction il suffit de vérifier qu'elle ne passe pas plus d'une fois par toute abcisse x_0.
- ➔ Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ une fonction. Pour chaque $y_0 \in \mathcal{I}m\ _f$ il peut exister plusieurs antécédents. Leur nombre est donné par le nombre d'intersections de la droite $y = y_0$ avec le graphe de f.

Exemple : Dans le repère ci-dessous on a représenté le graphe d'une fonction. On a surligné le domaine de définition (plus épais) et l'ensemble image.

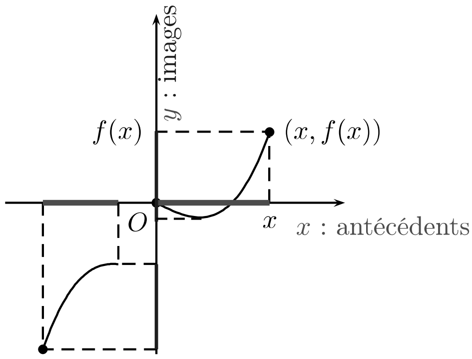

FIGURE 1.1 – Ensemble de définition et image d'une fonction

Attention

- ➔ Résoudre l'équation $f(x) = c$ revient à étudier les abscisses des points d'intersection entre le graphe de la fonction $x \to f(x)$ et la droite $y = c$.
- ➔ Résoudre l'inéquation $f(x) < c$ ($f(x) > c$) revient à chercher les abscisses des points du graphe de f qui se trouvent en dessous (au dessus) de la droite $y = c$.
- ➔ Si f et g sont deux fonctions telles que $f(x) < g(x)$ pour $x \in I$, alors sur I, le graphe de f se trouve en dessous du graphe de g.

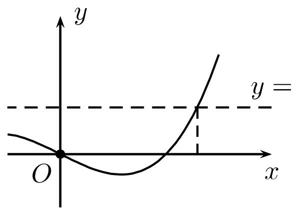

Figure 1.2 – Résolution graphique de l'équation $f(x) = c$

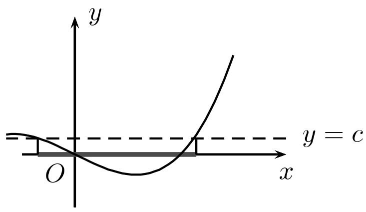

Figure 1.3 – Résolution graphique de l'inéquation $f(x) \leqslant c$