Chapitre 1

Raisonnement par récurrence

1 Assimiler le cours

Partons d'un exemple :

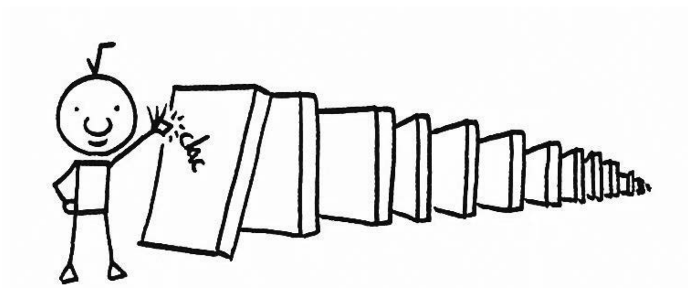
$8^0 - 1 = 0 = 7 \times 0$ $8^1 - 1 = 7 = 7 \times 1$ $8^2 - 1 = 63 = 7 \times 9$ $8^3 - 1 = 511 = 7 \times 73$

Il apparaît que pour $n = 0$, 1, 2 ou 3, le nombre $8^n - 1$ est un multiple de 7.

Mais une constatation sur quelques exemples ne suffit pas à généraliser une propriété.
Que dire de $8^{345} - 1$? Est-ce ou non un multiple de 7 ? Le calcul dépasse même les capacités de calcul de notre calculatrice. Conclure que $8^n - 1$ est multiple de 7 pour tout entier naturel n demanderait d'effectuer une infinité de tests, ce qui n'est pas réalisable.

Le raisonnement par récurrence permet de répondre à cette question en seulement quelques étapes, et peut s'apparenter à un chemin de dominos.
Pour faire tomber tous les dominos il suffit que :

1- le premier domino tombe (phase d'**initialisation**),
2- la chute d'un domino entraîne la chute du suivant (phase d'**hérédité**).



Principe du raisonnement par récurrence

- Soit n_0 un nombre entier naturel et soit P_n une propriété qui dépend d'un nombre entier naturel n supérieur ou égal à n_0.

  Si la propriété P_n vérifie les deux conditions suivantes :

  1- **Initialisation** : P_{n_0} est vraie.
  2- **Hérédité** : Soit n **un** entier naturel supérieur ou égal à n_0.
  On **suppose** que P_n est vraie, puis avec cette hypothèse de récurrence on **montre** que P_{n+1} est vraie : la vérité se transmet.

  Alors pour tout nombre entier naturel $n \geqslant n_0$, **P_n est vraie**.

☐ *Le raisonnement par récurrence suit un schéma très précis et la structure de ce raisonnement est la même tout le temps : il est important de faire figurer sur la map ce circuit.*

- **Étape 1 : Énoncer** clairement la propriété et le **rang** n_0 à partir duquel on compte la démontrer.
- **Étape 2 : Initialisation**
  On vérifie que pour $n = n_0$ la propriété est vraie.
  La plupart du temps $n_0 = 0$ ou $n_0 = 1$.
- **Étape 3 : Hérédité**
  Soit n un entier naturel supérieur à n_0 et supposons que la propriété P_n soit vraie au rang n. Il s'agit alors de démontrer que la vérité va se transmettre au rang $n+1$ et donc que P_{n+1} est vraie aussi.
- **Étape 4 : Conclusion**
  Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à n_0, P_n est vraie.

☐ *Lorsque l'énoncé précise que n est un entier naturel, cela sous-entend que le premier rang n_0 est* 0.

☐ *S'il précise que n est un entier naturel non nul, alors* $n_0 = 1$.

☐ *La phase d'hérédité est la plus délicate. Pour montrer que la vérité se transmet d'un rang au suivant, il s'agit de démontrer l'implication : P_n vraie $\Rightarrow P_{n+1}$ vraie.*
Il s'agit alors de trouver un lien pour passer de P_n à P_{n+1}.

☐ *Commencer par écrire clairement la propriété P_n que l'on suppose vraie, puis écrire clairement P_{n+1} que l'on cherche à établir.*

☐ *Si on doit démontrer une inégalité, on peut penser à étudier le signe de la différence.*

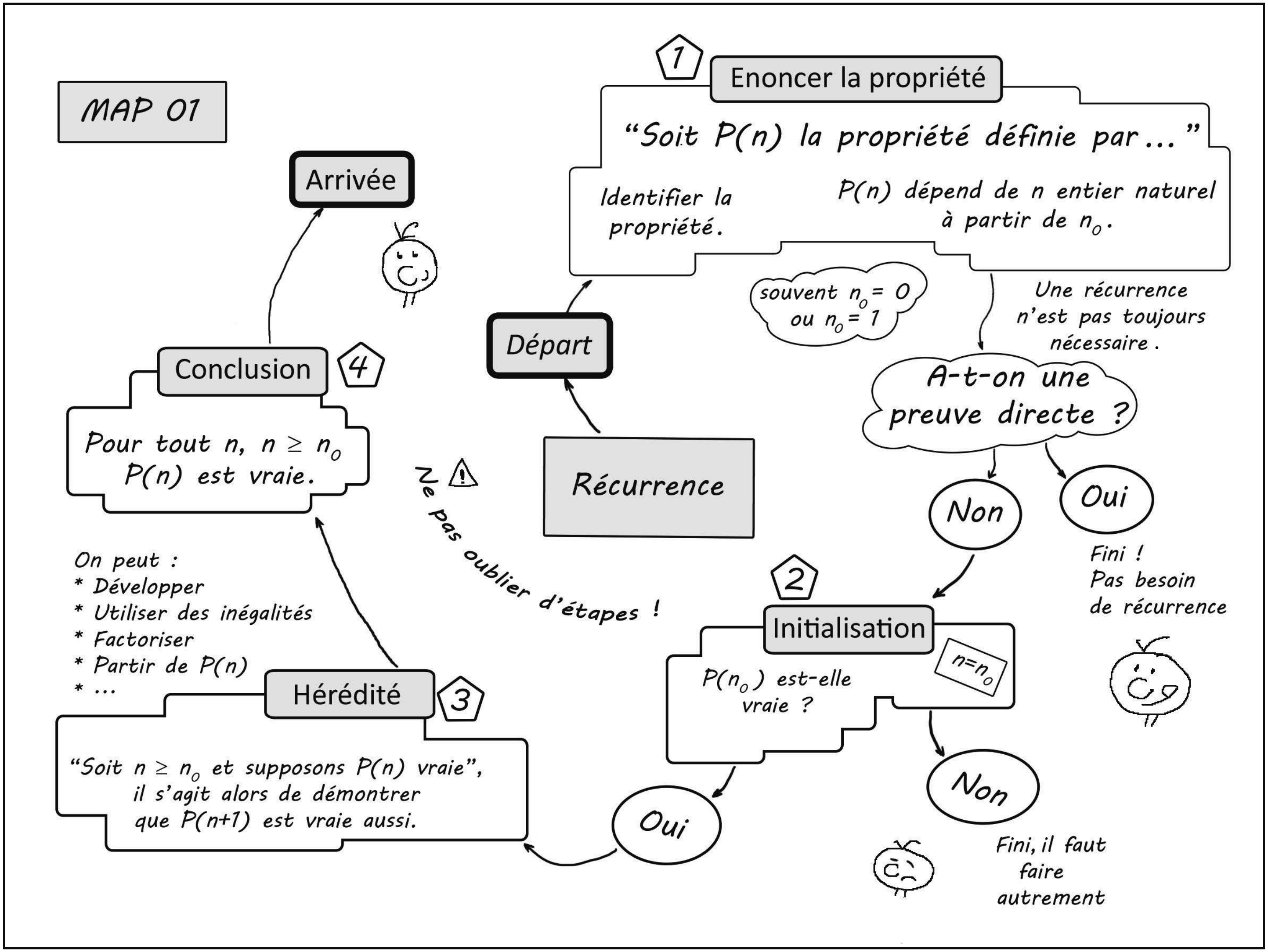
☐ *Si on doit démontrer une égalité, on peut partir de l'un des membres pour arriver au deuxième, ou montrer que la différence vaut zéro.*

2 Réaliser la carte mentale

Pour réaliser cette carte mentale, il faut commencer par placer au centre de la page le titre **Récurrence**.

Le raisonnement par récurrence est composé d'étapes clairement identifiées. La map sera donc réalisée sous la forme d'un circuit, d'un chemin, que l'on pourra ensuite parcourir mentalement pour établir le raisonnement.

Il faudra aussi compléter la map au fur et à mesure de l'année par des mots ou des dessins rencontrés dans le cadre du thème qui seront autant de balises de réactivation. Les différentes étapes du chemin seront ainsi ancrées dans notre mémoire.
Par exemple, on peut rajouter les différentes idées qui permettent de démonter l'hérédité, selon qu'il s'agit d'une inégalité, d'une égalité, etc.

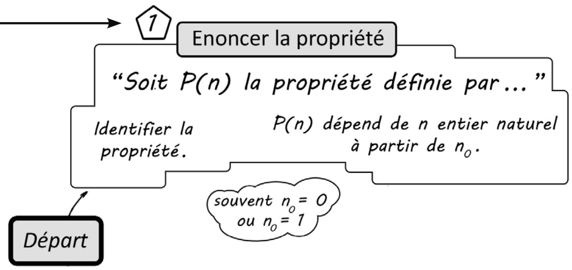

MAP 01
Récurrence
Départ
1
Enoncer la propriété
“Soit P(n) la propriété définie par ... ”
Identifier la propriété.
P(n) dépend de n entier naturel à partir de n0.
souvent n0 = 0 ou n0 = 1
Une récurrence n’est pas toujours nécessaire .
A-t-on une preuve directe ?
Oui
Fini ! Pas besoin de récurrence
Non
2
Initialisation
n=n0
P(n0) est-elle vraie ?
Non
Fini, il faut faire autrement
Oui
3
Hérédité
“Soit n ≥ n0 et supposons P(n) vraie”, il s’agit alors de démontrer que P(n+1) est vraie aussi.
On peut :
* Développer
* Utiliser des inégalités
* Factoriser
* Partir de P(n)
* ...
Ne pas oublier d’étapes !
4
Conclusion
Pour tout n, n ≥ n0 P(n) est vraie.
Arrivée

3 S'entraîner : retour sur l'exemple

Montrer que pour tout entier naturel n,
le nombre $A_n = 8^n - 1$ est multiple de 7.

Je visualise sur la map le circuit.

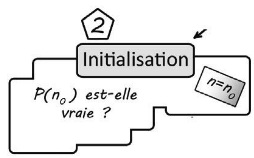
Étape 1 : Énoncer la propriété



Soit P_n la propriété définie pour n entier naturel par

« $8^n - 1$ est multiple de 7 ».

Étape 2 : Initialisation



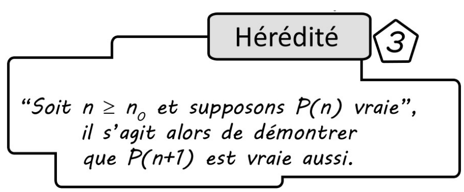
$n = 0$: on calcule $8^0 - 1 = 0$.

Donc 0 est bien un multiple de 7 et

P_0 est vraie.

Ici $n_0 = 0$ car la propriété doit être vérifiée pour tous les entiers naturels, on commence donc à 0.

Étape 3 : Hérédité



Soit $n \in \mathbb{N}$ et **supposons** P_n vraie, c'est-à-dire supposons qu'il existe un entier k tel que

$8^n - 1 = 7k$, et donc $8^n = 7k + 1$.

Il s'agit alors de démontrer que $8^{n+1} - 1$ est aussi un multiple de 7.

$8^{n+1} = 8 \times 8^n$

On a : $8^{n+1} - 1 = 8 \times 8^n - 1$

$= 8 \times (7k + 1) - 1$

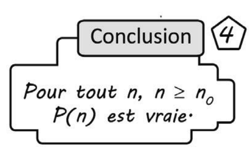
$= 8 \times 7k + 8 - 1$

$= 7 \times (8k + 1)$

Je pars du membre de gauche et j'utilise l'hypothèse de récurrence pour montrer que la vérité se transmet.

Or $8k + 1$ est un entier, donc P_{n+1} est vraie également.

Étape 4 : Conclusion



Pour tout n entier naturel, P_n est vraie.

4 Des exercices

Exercice 1.1. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul,

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Exercice 1.2. Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, $2^n > 2n$.

Exercice 1.3. Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1,

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + \ldots + \mathrm{n} \times (n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Exercice 1.4. Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, $5^n \geqslant 4^n + 3n$.

Exercice 1.5. Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 4$, $2^n \geqslant n^2$.

Exercice 1.6. Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, $3n^2 \geqslant (n+1)^2$.

Exercice 1.7. Démontrer que pour tout entier naturel n, $4^n + 5$ est un multiple de 3.

Exercice 1.8. On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = 1$ et pour n entier naturel non nul, $u_{n+1} = 2u_n + 1$. Démontrer que pour tout n entier naturel non nul, $u_n = 2^n - 1$.

Exercice 1.9. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour n entier naturel, $u_{n+1} = 0{,}2u_n + 4$. Démontrer que pour tout n entier naturel, $u_n \leqslant 5$.

Exercice 1.10. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour n entier naturel, $u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n}$. Démontrer que pour tout n entier naturel, $\dfrac{3}{2} \leqslant u_n \leqslant 2$.

Exercice 1.11. *(D'après Bac S, centres étrangers, juin 2016)*

On considère la fonction g définie pour tout réel x de $[0 ; 1]$ par $g(x) = \dfrac{x^3}{4} + \dfrac{3}{8}$ et la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = g(u_n)$.

1. Calculer u_1.
2. Démontrer que la fonction g est croissante sur l'intervalle $[0 ; 1]$.
3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

Exercice 1.12. *(D'après Bac S, Asie, juin 2016)*

On modélise l'évolution d'une population de bactéries dans une cuve par la suite (u_n) définie par $u_0 = 1000$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1{,}2u_n - 100$.

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1000$.

Exercice 1.13. *(D'après Bac S, Amérique du sud, novembre 2016)*

La suite (u_n) est définie par :

$$u_0 = 0 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \frac{1}{2 - u_n}.$$

1. À l'aide du calcul des premiers termes de la suite (u_n), conjecturer la forme explicite de u_n en fonction de n.
2. Démontrer cette conjecture.

Exercice 1.14. *(D'après Bac S, Pondichéry, avril 2015)*

La suite (h_n) est définie par : $h_0 = 80$ et pour tout entier naturel n, $h_{n+1} = 0{,}75h_n + 30$.

1. À l'aide de la calculatrice, conjecturer le sens de variation de la suite (h_n).
2. Démontrer cette conjecture, à l'aide d'un raisonnement par récurrence.

Exercice 1.15. *(D'après Bac S, Amérique du nord, mai 2013)*

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$.

Démontrer que, pour tout entier naturel n, $0 < u_n \leqslant 2$.

Exercice 1.16. *(D'après Bac S, métropole, septembre 2013)*

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 2 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{2u_n + 1}.$$

On admet que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.

1. Calculer u_1, u_2, u_3, u_4. On pourra en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.
2. Vérifier que si n est l'un des entiers 0, 1, 2, 3, 4 alors $u_n - 1$ a le même signe que $(-1)^n$.
3. Établir que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - 1 = \dfrac{-u_n + 1}{2u_n + 1}$.
4. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n - 1$ a le même signe que $(-1)^n$.